TÍNH VỮNG, ỔN ĐỊNH VÀ HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN CHO PHƯƠNG TRÌNH NHIỆT

NGÔ NGỌC HƯNG
Trường Đại học Công nghiệp Thành phố Hồ Chí Minh
ngongochung@iuh.edu.vn

Tóm tắt. Trong bài báo này tôi sẽ bàn về phương pháp số để giải phương trình nhiệt với điều kiện ban đầu và điều kiện biên Dirichlet. Xấp xỉ của các đạo hàm bằng phương pháp sai phân hữu hạn giữ vai trò quan trọng trong phương pháp số trong lĩnh vực phương trình đạo hàm riêng, đặc biệt các bài toán biên. Việc nghiên cứu tính nhất quán và tính ổn định của nghiệm xấp xỉ là cần thiết. Vì có các tính chất này, nghiệm xấp xỉ mới đảm bảo hội tụ về nghiệm chính xác. Ví dụ số cũng sẽ được thực hiện để minh họa cho các kết quả lý thuyết.
Từ khóa. Phương trình nhiệt, phương pháp sai phân hữu hạn, tính vững, tính ổn định.

CONSISTENCY, STABILITY AND CONVERGENCE OF FINITE DIFFERENCE SCHEMES ON THE HEAT EQUATION

Abstract. This paper deal with a numerical method for the solution of the heat equation together with initial condition and Dirichlet boundary conditions. The approximation of derivatives by finite differences plays a central role in finite difference methods for the numerical solution of differential equations, especially boundary value problems. The consistency and the stability of the schemes are described. Futhermore, numerical simulations are performed to illustrate the accuracy and stability of the regularized solution.
Keywords. Heat equation, finite difference method, consistency, stability.

1 GIỚI THIỆU

Trong thực tế, nhiều vấn đề trong vật lý như phương trình truyền nhiệt, phương trình sóng, phương trình Poisson và phương trình Laplace được mô hình hóa bằng các phương trình đạo hàm riêng. Một số phương trình đạo hàm riêng này có nghiệm chính xác trong những miền đặc biệt. Nhưng nói chung việc xác định nghiệm chính xác của các phương trình đạo hàm riêng trên miền bất kỳ gặp nhiều khó khăn. Do đó, việc nghiên cứu phương pháp tính số để tìm nghiệm gần đúng là rất quan trọng.

Phương pháp sai phân hữu hạn là một trong những phương pháp dùng để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân. Bằng việc phân hoạch miền xác định thành hữu hạn các lưới nhỏ. Nghiệm xấp xỉ được tính tại các điểm lưới của miền xác định [1].

Bài viết này liên quan đến phương pháp sai phân hữu hạn cho phương trình nhiệt trong thanh vật liệu có chiều dài L, phương trình có dạng như sau

$$u_t = \mu u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T], \tag{1}$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in [0,L], \tag{2}$$

và điều kiện biên Dirichlet

$$u(0,t) = h(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(L,t) = k(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

trong đó hàm chưa biết $u(x,t)$ là giá trị nhiệt độ tại vị trí ở thời điểm t, $u_t(x,t)$ và $u_{xx}(x,t)$ tương ứng là đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm $u(x,t)$ theo biến thời gian t và không gian x. Hằng số μ là độ dẫn nhiệt của vật liệu. Hàm số $g(x)$ là phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu. T là thời điểm cuối. Các hàm số theo biến thời gian $h(t)$ và $k(t)$ mô tả dòng nhiệt tại hai biên. Ở đây tôi giả định là vật liệu đồng nhất và bề mặt của thanh được cách nhiệt để nhiệt chỉ truyền theo hướng x. Giả sử thêm là bài toán trên là chỉnh và có nghiệm duy nhất $u(x,t)$.

2 PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN

Đầu tiên, ta tiến hành rời rạc hóa miền liên tục $[0,L]\times[0,T]$ thành một tập $N_x \times N_t$ điểm lưới. Ở đây tôi sử dụng các điểm chia cách đều nhau, nghĩa là ta chia miền của x thành tập các điểm cách đều nhau

$$x_i = i\Delta_x, \quad \Delta_x = \frac{L}{N_x}, \quad i = 0,\ldots,N_x, \tag{5}$$

tương tự, đối với miền của t được chia như sau

$$t_j = i\Delta_j, \quad \Delta_j = \frac{T}{N_t}, \quad j = 0,\ldots,N_t. \tag{6}$$

Ta ký hiệu u_i^j là giá trị của $u(x,t)$ tại điểm lưới (x_i,t_j). Ta xấp xỉ đạo hàm riêng $u_t(x_i,t_j)$ của phương trình (1) như sau

$$u_t(x_i,t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}, \quad j = 0,\ldots,N_t - 1, \tag{7}$$

trong đó chú ý, từ điều kiện ban đầu (2) ta có

$$u(x_i,0) = u_i^0 = g(x_i), \quad i = 0,\ldots,N_x. \tag{8}$$

Tương tự, đối với đạo hàm riêng cấp hai $u_{xx}(x_i,t_j)$ ta có xấp xỉ như sau

$$u_{xx}(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta^2 x}, \quad i = 1,\ldots,N_x - 1, \quad j = 0,\ldots,N_t - 1, \tag{9}$$

và theo điều kiện Dirichlet, ta có

$$u(0,t_j) = u_0^j = h(t_j), \quad j = 0,\ldots,N_t - 1, \tag{10}$$

và

$$u(L,t_j) = u_{N_x}^j = k(t_j), \quad j = 0,\ldots,N_t - 1. \tag{11}$$

Vậy ta có công thức xấp xỉ cho (1) như sau

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \mu \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta^2 x} + f_i^j \\ u_0^j = h(t_j), \quad u_{N_x}^j = k(t_j), \quad u_i^0 = g(x_i) \end{cases}, \quad i = 1,\ldots,N_x - 1, \quad j = 0,\ldots,N_t - 1 \tag{12}$$

trong đó $f_i^j = f(x_i,t_j)$. Chi tiết, với $j = 0,\ldots,N_t - 1$ ta có

$$\begin{cases} i = 1, & \dfrac{u_1^{j+1} - u_1^j}{\Delta t} = \mu \dfrac{u_0^j - 2u_1^j + u_2^j}{\Delta^2 x} + f_1^0, \\ i = 2, & \dfrac{u_2^{j+1} - u_2^j}{\Delta t} = \mu \dfrac{u_1^j - 2u_2^j + u_3^j}{\Delta^2 x} + f_2^0, \\ \vdots & \\ i = N_x - 1, & \dfrac{u_{N_x-1}^{j+1} - u_{N_x-1}^j}{\Delta t} = \mu \dfrac{u_{N_x-2}^j - 2u_{N_x-1}^j + u_{N_x}^j}{\Delta^2 x} + f_2^0. \end{cases} \tag{13}$$

Do điều kiện biên, $u_0^j = h(t_j)$ và $u_{N_x}^j = k(t_j)$, hệ phương trình (13) được viết lại như sau

$$\begin{cases} i=1, & \dfrac{u_1^{j+1}-u_1^j}{\Delta t}=\mu\dfrac{-2u_1^j+u_2^j}{\Delta^2 x}+f_1^0+\dfrac{\mu}{\Delta^2 x}h(t_j), \\ i=2, & \dfrac{u_2^{j+1}-u_2^j}{\Delta t}=\mu\dfrac{u_1^j-2u_2^j+u_3^j}{\Delta^2 x}+f_2^0, \\ \vdots & \\ i=N_x-1, & \dfrac{u_{N_x-1}^{j+1}-u_{N_x-1}^j}{\Delta t}=\mu\dfrac{u_{N_x-2}^j-2u_{N_x-1}^j}{\Delta^2 x}+f_2^j+\dfrac{\mu}{\Delta^2 x}k(t_j). \end{cases} \tag{14}$$

Sắp xếp lại các số hạng trong hệ phương trình (14) ta được hệ tương đương như sau

$$\begin{cases} i=1, & u_1^{j+1}-u_1^j=\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}(-2u_1^j+u_2^j)+f_1^j\Delta t+\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}h(t_j), \\ i=2, & u_2^{j+1}-u_2^j=\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}(u_1^j-2u_2^j+u_3^j)+f_2^j\Delta t, \\ \vdots & \\ i=N_x-1, & u_{N_x-1}^{j+1}-u_{N_x-1}^j=\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}(u_{N_x-2}^j-2u_{N_x-1}^j)+f_{N_x-1}^j\Delta t+\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}k(t_j). \end{cases} \tag{15}$$

Để đơn giản trong trình bày, ta đặt $r=\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}$. Hệ phương trình (15) được viết lại như sau

$$\begin{cases} i=1, & u_1^{j+1}-u_1^j=-2ru_1^j+ru_2^j+f_1^j\Delta t+\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}h(t_j), \\ i=2, & u_2^{j+1}-u_2^j=ru_1^j-2ru_2^j+ru_3^j+f_2^j\Delta t, \\ i=3, & u_3^{j+1}-u_3^j= \quad ru_2^j-2ru_3^j+ru_4^j+f_2^j\Delta t, \\ \ldots & \\ i=N_x-2, & u_{N_x-2}^{j+1}-u_{N_x-2}^j=ru_{N-3}^j-2ru_{N-2}^j+ru_{N-1}^j+f_{N_x-1}^j\Delta t, \\ i=N_x-1, & u_{N_x-1}^{j+1}-u_{N_x-1}^j= \quad ru_{N_x-2}^j-2ru_{N_x-1}^j+f_{N_x-1}^j\Delta t+\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}k(t_j). \end{cases} \tag{16}$$

Vậy, ta có được $u_i^{j+1}, i=1\cdots N-1$ được tính như sau

$$\begin{cases} i=1, & u_1^{j+1}=(-2r+1)u_1^j+ru_2^j+f_1^j\Delta t+\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}h(t_j), \\ i=2, & u_2^{j+1}=ru_1^j+(-2r+1)u_2^j+ru_3^j+f_2^j\Delta t, \\ i=3, & u_3^{j+1}= \quad ru_2^j+(-2r+1)u_3^j+ru_4^j+f_2^j\Delta t, \\ \ldots & \\ i=N_x-2, & u_{N_x-2}^{j+1}=ru_{N-3}^j+(-2r+1)u_{N-2}^j+ru_{N-1}^j+f_{N_x-1}^j\Delta t, \\ i=N_x-1, & u_{N_x-1}^{j+1}= \quad ru_{N_x-2}^j+(-2r+1)u_{N_x-1}^j+f_{N_x-1}^j\Delta t+\dfrac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}k(t_j). \end{cases} \tag{17}$$

Đặt các ma trận

$$\mathbf{F}^j = \begin{pmatrix} f_1^j \Delta t + \dfrac{\mu \Delta t}{\Delta^2 x} h(t_j) \\ f_2^j \Delta t \\ \\ \\ f_{N_x-2}^j \Delta t \\ f_{N_x-1}^j \Delta t + \dfrac{\mu \Delta t}{\Delta^2 x} k(t_j) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^j = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^j \\ u_{N_x-1}^j \end{pmatrix}, \quad \text{trong đó } \mathbf{F}^j, \mathbf{u}^j \in \mathbb{R}^{N_x-1} \times \mathbb{R}^1.$$

và ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2r+1 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -2r+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & -2r+1 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & -2r+1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & -2r+1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_x-1} \times \mathbb{R}^{N_x-1}. \tag{18}$$

Hệ phương trình (15) tương đương với phương trình ma trận như sau

$$\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}^j + \mathbf{F}^j, \quad j = 0, \ldots, N_t - 1. \tag{19}$$

Sau khi giải hệ trên ta được $u_i^{j+1}, i = 1 \cdots N-1$. Giá trị biên $u_0^{j+1} = h(t_{j+1})$ và $u_N^{j+1} = k(t_{j+1})$.

3 HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Bổ đề 1. Cho ma trận vuông $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ có dạng 3 đường chéo như sau

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & a & b & c \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & a & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Trị riêng và vector riêng của $\mathbf{A}$ tương ứng như sau

$$\lambda_j = b + 2\sqrt{ac} \cos \frac{\pi j}{n+1}, \quad v_j = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{a}{c}\right)^{1/2} \sin \dfrac{1 \cdot \pi j}{n+1} \\ \left(\dfrac{a}{c}\right)^{1/2} \sin \dfrac{2 \cdot \pi j}{n+1} \\ \cdots \\ \left(\dfrac{a}{c}\right)^{1/2} \sin \dfrac{n \cdot \pi j}{n+1} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Chứng minh. Xem [2, 3].

Định nghĩa 2 (Chuẩn của sai số). Với mọi điểm trên lưới $(x_i, t_j) \in (0,1) \times (0,T)$, gọi u_i^j là giá trị xấp xỉ của nghiệm chính xác $u(x_i, t_j)$. Sai số

$$Err(t_j) = (u_0^j - u(x_0, t_j), u_1^j - u(x_1, t_j), \ldots, u_{N_x}^j - u(x_{N_x}, t_j))$$

i) Cố định thời gian t_j, chuẩn của sai số theo không gian

$$\| Err(t_j) \|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{N_x} \Delta x (u_i^j - u(x_i, t_j))^2$$

ii) Chuẩn của sai số theo không gian và thời gian

$$\| Err(\cdot) \|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_x} \Delta t \Delta x (u_i^j - u(x_i, t_j))^2$$

3.1 Tính vững

Nhìn chung tại các điểm lưới (x_i, t_j), nghiệm chính xác không thỏa công thức rời rạc (12), sai số sẽ có dạng như sau

$$\varepsilon_i^j = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - \mu \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta^2 x} - f(x_i, t_j). \tag{21}$$

Định lý 2. *Xấp xỉ theo công thức (12) có tính vững, nghĩa là* ε_i^j *sẽ hội tụ về* 0 *khi* Δx *và* Δt *tiến đến* 0.

Chứng minh. Khai triển chuỗi Taylor của hàm $u(x, t)$ theo biến t tại điểm t_j, ta được

$$u(x_i, t) = u(x_i, t_j) + u_t(x_i, t_j)(t - t_j) + \frac{u_{tt}(x_i, t_j)}{2}(t - t_j)^2 + \cdots,$$

suy ra

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{j+1}) &= u(x_i, t_j) + u_t(x_i, t_j)(t_{j+1} - t_j) + \frac{u_{tt}(x_i, t_j)}{2}(t_{j+1} - t_j)^2 + \cdots \\ &= u(x_i, t_j) + u_t(x_i, t_j)\Delta t + \frac{u_{tt}(x_i, t_j)}{2}(\Delta t)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

vậy, ta rút ra được

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} = u_t(x_i, t_j) + \frac{u_{tt}(x_i, t_j)}{2}\Delta t + O((\Delta t)^2) \tag{22}$$

Tương tự, khai triển chuỗi Taylor của hàm $u(x, t)$ theo biến x tại điểm x_i, ta được

$$\begin{aligned} u(x, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j)(x - x_i) + \frac{u_{xx}(x_i, t_j)}{2}(x - x_i)^2 \\ &+ \frac{u_{xxx}(x_i, t_j)}{6}(x - x_i)^3 + \frac{u_{xxxx}(x_i, t_j)}{24}(x - x_i)^4 + \cdots \end{aligned}$$

với $x = x_{i+1}$, ta được

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j)(x_{i+1} - x_i) + \frac{u_{xx}(x_i, t_j)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 \\ &+ \frac{u_{xxx}(x_i, t_j)}{6}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{u_{xxxx}(x_i, t_j)}{12}(x_{i+1} - x_i)^4 \cdots \\ &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j)\Delta_x + \frac{u_{xx}(x_i, t_j)}{2}(\Delta_x)^2 \\ &+ \frac{u_{xxx}(x_i, t_j)}{6}(\Delta_x)^3 + \frac{u_{xxxx}(x_i, t_j)}{24}(\Delta_x)^4 \cdots, \end{aligned} \tag{23}$$

và với $x = x_{i-1}$, ta được

$$\begin{aligned} u(x_{i-1},t_j) &= u(x_i,t_j) + u_x(x_i,t_j)(x_{i-1}-x_i) + \frac{u_{xx}(x_i,t_j)}{2}(x_{i-1}-x_i)^2 \\ &\quad + \frac{u_{xxx}(x_i,t_j)}{6}(x_{i-1}-x_i)^3 + \frac{u_{xxxx}(x_i,t_j)}{12}(x_{i-1}-x_i)^4 \cdots \\ &= u(x_i,t_j) - u_x(x_i,t_j)\Delta_x + \frac{u_{xx}(x_i,t_j)}{2}(\Delta_x)^2 \\ &\quad - \frac{u_{xxx}(x_i,t_j)}{6}(\Delta_x)^3 + \frac{u_{xxxx}(x_i,t_j)}{24}(\Delta_x)^4 \cdots, \end{aligned} \tag{24}$$

Từ (23) và (24) ta được

$$\frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{\Delta^2 x} = u_{xx}(x_i,t_j) + \frac{u_{xxxx}(x_i,t_j)}{12}(\Delta_x)^2 + \cdots \tag{25}$$

Từ (21), (22) và (25) ta suy ra được

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^j &= u_t(x_i,t_j) + \frac{u_{tt}(x_i,t_j)}{2}\Delta t + \cdots - \mu\left(u_{xx}(x_i,t_j) + \frac{u_{xxxx}(x_i,t_j)}{12}(\Delta_x)^2 + \cdots\right) - f(x_i,t_j) \\ &= \frac{u_{tt}(x_i,t_j)}{2}\Delta t + \cdots - \mu\frac{u_{xxxx}(x_i,t_j)}{12}(\Delta_x)^2 + \cdots \\ &= O(\Delta t + (\Delta_x)^2), \end{aligned}$$

trong đó, ta sử dụng giả thiết phương trình $u_t = \mu u_{xx} + f(x,t)$. Ta thấy rằng ε_i^j sẽ hội tụ về 0 khi Δx và Δt tiến đến 0. Do đó, xấp xỉ của ta có tính chất vững.

3.2 Tính ổn định

Để thuận tiện, ta đặt $r = \frac{\mu\Delta t}{\Delta^2 x}$. Theo bổ đề 1, ma trận (18) có trị riêng và vector riêng tương ứng như sau

$$\lambda_j = -2r + 2r\cos\frac{\pi j}{n+1},\ v_j = \begin{pmatrix} \sin\frac{1\cdot\pi j}{n+1} \\ \sin\frac{2\cdot\pi j}{n+1} \\ \cdots \\ \sin\frac{n\cdot\pi j}{n+1} \end{pmatrix},\quad j = 1,\ldots,N.$$

Do đó, ta có

$$\begin{cases} \lambda_{\min} = \lambda_{N_x-1} = 1 - 2r + 2r\cos\frac{\pi(N_x-1)}{N_x} \\ \lambda_{\max} = \lambda_1 = 1 - 2r + 2r\cos\frac{\pi}{N_x} \end{cases}$$

Nếu $\pi / N_x \ll 1$, ta có được

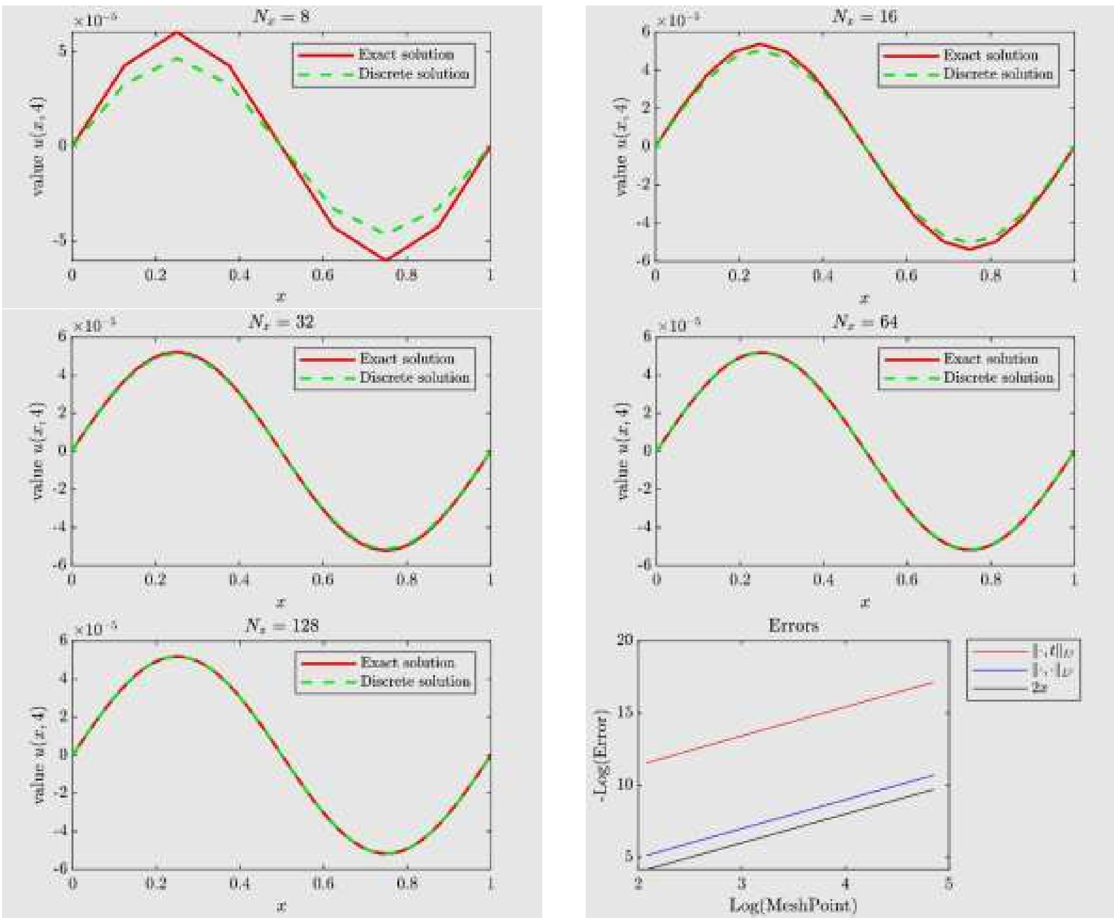
$$\begin{cases} \lambda_{\min} = \lambda_{N_x-1} = 1 - 4r + r\left(\frac{\pi}{N_x}\right)^2, \\ \lambda_{\max} = \lambda_1 = 1 - r\left(\frac{\pi}{N_x}\right)^2, \end{cases}$$

Điều kiện hội tụ cho $\lambda_{\min}$ dẫn đến

$$r \le \frac{2}{4-\left(\dfrac{\pi}{N_x}\right)^2} \approx \frac{1}{2}, \tag{26}$$

với điều hiện này, (19) sẽ ổn định.

4 VÍ DỤ SỐ



Hình 1. Nghiệm xấp xỉ hội tụ về nghiệm chính xác.

Phần này, tôi sẽ xét 2 ví dụ cho hai trường hợp: đầu tiên là r thỏa điều kiện (26), và trường hợp r không thỏa điều kiện (26) để ta khảo sát tính ổn định của nghiệm.

Ví dụ 1. Ta xét phương trình đạo hàm riêng

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \quad 0 < T,$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad x \in (0,1),$$

và cho biết thêm, bài toán có biên Dirichlet

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Cho trước $\mu = \dfrac{1}{16}$, dễ dàng kiểm tra được bài toán này có nghiệm chính xác

$$u(x,t) = e^{-\frac{1}{4}\pi^2 t}\sin(2\pi x)$$

Mục tiêu bài toán ở đây, ta tìm giá trị xấp xỉ cho $u(x,t)$, $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$.

Trường hợp 1. Chọn Δt sao cho (26) được thỏa, nghĩa là

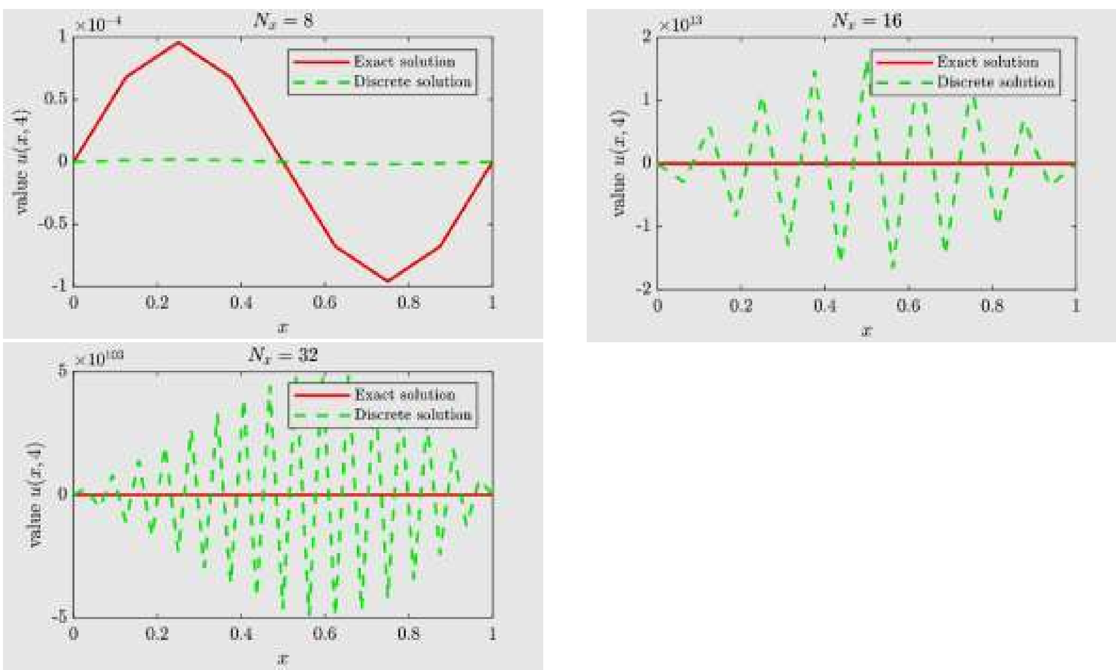
$$r = \frac{1}{16}\frac{\Delta t}{\Delta^2 x} < \frac{1}{2} \text{ suy ra } \frac{\Delta t}{\Delta^2 x} < 8$$

Ta có kết quả so sánh nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ tại $t = 4$ và ta chọn $\Delta t = 4\Delta^2 x$. Tại $t = 4$, tôi so sánh giá trị của nghiệm chính xác $u(x) := u(x,4)$ với nghiệm xấp xỉ. Khi N_x càng lớn thì nghiệm xấp xỉ càng gần với nghiệm chính xác xem (Hình 1).

Trường hợp 2. Chọn Δt sao cho điều kiện (26) bị vi phạm, nghĩa là

$$r = \frac{1}{16}\frac{\Delta t}{\Delta^2 x} > \frac{1}{2} \text{ suy ra } \frac{\Delta t}{\Delta^2 x} > 8$$

Ta có kết quả so sánh nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ tại $t = 4$ và ta chọn $\Delta t = 16\Delta^2 x$. Khi điều kiện (26) bị vi phạm, nghiệm xấp xỉ không hội tụ về nghiệm chính xác. Điều này phản ánh đúng kết quả lý thuyết đã trình bày, xem (Hình 2).



Hình 2. Nghiệm xấp xỉ không hội tụ về nghiệm chính xác.

5 KẾT LUẬN

Trong bài này tôi đã trình bày phương pháp số để giải phương trình nhiệt bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Để đảm bảo phương pháp hội tụ, tôi khảo sát tính vững và tính ổn định bằng phân tích phổ của ma trận. Kết quả bài báo chỉ ra rằng phương pháp sai phân hữu hạn trong trường hợp này có tính vững và tính ổn định chỉ đúng với một số cách chọn r. Ví dụ số cũng được thiết lập để minh họa kết quả lý thuyết.

REFERENCES

[1] K. Sayevand, "Convergence and stability analysis of modified backward time centered space approach for non-dimensionalizing parabolic equation," J. Nonlinear Sci., pp. 11-17, 2014.

[2] V. FACK, G. VANDEN BERGHE, H.E. DE MEYER , "Some finite difference methods for computing eigenvalues and eigenvectors of special two-point boundary value problems," Journal of Computational and Applied Mathematics , pp. 211-217 , 1987.

[3] S. Sajavicius, "On the eigenvalue problems for differential operators with coupled boundary conditions," Nonlinear Analysis: Modelling and Control, vol. 15, p. 493–500, 2010.

[4] J.Wang, "A model of competitive stock trading volume," Journal of Political Economy, vol. 102, p. 127–168, 1994.

Ngày nhận bài: 11/11/2019

Ngày chấp nhận đăng: 19/03/2020