KHÔI PHỤC HÀM NGUỒN CHO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN ĐẠO HÀM CẤP KHÔNG NGUYÊN VỚI DỮ LIỆU NHIỄU NGẪU NHIÊN

NGÔ NGỌC HƯNG, NGUYỄN ĐỨC PHƯƠNG*
Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp Thành phố Hồ Chí Minh
** Tác giả liên hệ: nguyenducphuong@iuh.edu.vn*
DOIs: https://doi.org/10.46242/jstiuh.v69i03.5111

Tóm tắt. Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán tìm hàm nguồn của phương trình khuếch tán $\partial_t^\alpha - \Delta u = f(x)$. Ở đây chúng tôi xét đến đạo hàm cấp không nguyên theo nghĩa Conformable. Dữ liệu đầu vào được giả định tuân theo mô hình Gassian white noise. Bài toán này là không chỉnh theo nghĩa Hadamard. Bằng phương pháp ước lượng phi tham số, và phương pháp chỉnh hóa Tikhonov chúng tôi thiết lập được nghiệm chỉnh hóa đồng thời đánh giá được sai số.
Từ khóa. Conformable, khuếch tán, không chỉnh, chỉnh hóa Tikhonov.

1 GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

Cho miền không gian $\Omega \subset \mathbb{R}$ là miền bị chặn. Xét phương trình khuếch tán không thuần nhất

$$\partial_t^\alpha(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

có biên Dirichlet với các điều kiện thỏa

$$\begin{cases} u(x,t)\,|_{x\in\partial\Omega} = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,T) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

trong bài báo này chúng tôi xét đến đạo hàm cấp không nguyên theo biến thời gian ∂_t^α có cấp $\alpha \in (0,1)$ theo nghĩa Conformable.

Định nghĩa 1. (xem [1, 2]). Cho hàm $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, đạo hàm Conformable với cấp $\alpha \in (0,1)$ được định nghĩa bởi

$$\partial_t^\alpha u(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{u(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - u(t)}{\epsilon}, \tag{2}$$

với mọi $t > 0$. Với $(0, t_0)$, $t_0 > 0$ và giới hạn $\lim_{t \to t_0^+} \partial_t^\alpha u(t)$ tồn tại thì

$$\partial_t^\alpha u(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} \partial_t^\alpha u(t).$$

Mệnh đề 1 (xem [3, 4]). Cho hàm $u : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi với mọi $t > 0$, khi đó

$$\partial_t^\alpha u = t^{1-\alpha} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \quad \alpha \in (0,1). \tag{3}$$

Có nhiều loại đạo hàm cấp không nguyên. Có thể kể đến một số loại đạo hàm cấp không nguyên: Riemann-Liouville, Caputo, Conformable, Grunwald-Letnikov, … Ngày nay các bài toán mô hình hóa các hiện tượng, người ta sử dụng phương trình đạo hàm cấp không nguyên trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật khác nhau [5, 6]. Chẳng hạn trong hóa học, để mô hình hóa sự khuếch tán của các ion trong chất điện phân thì việc sử dụng phương trình đạo hàm cấp không nguyên sẽ hiệu quả hơn vì do tính chất phi địa phương của đạo hàm cấp không nguyên nên nó mô tả hiện tương tương tác không cục bộ giữa các ion tốt hơn đạo hàm cổ điển do chúng không có tính chất này.

Trong ứng dụng, các hàm dữ liệu đầu vào chúng ta không có, thay vào đó ta chỉ có các giá trị quan sát của chúng. Do đặc điểm của dụng cụ đo, hoặc các yếu tố môi trường xung quanh, nên các phép đo luôn tồn tại sai số. trong bài báo này chúng tôi giả sử các quan sát có sai số tuân theo mô hình Gaussian white noise như sau

$$g^{\epsilon}(x) = g(x) + \epsilon W(x), \tag{4}$$

trong đó ϵ là biên độ nhiễu $W(x)$ là quá trình Gaussian white noise. Giả sử mô hình này ta không quan sát trực tiếp, mà được quan sát gián tiếp thông qua

$$\langle g^{\epsilon}, \varphi_j \rangle = \langle g, \varphi_j \rangle + \epsilon \langle W, \varphi_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

trong đó $\{\varphi_j\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Hilbert $L^2(\Omega)$ và $W_j := \langle W, \varphi_j \rangle$ tuân theo phân bố chuẩn chính tắc; $\langle g^{\epsilon}, \varphi_j \rangle$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân bố xác suất (xem [7]).

Bài toán này là không chỉnh (vi phạm tính liên tục theo dữ liệu), vì vậy cần đưa ra phương pháp chỉnh hóa. Có nhiều kết quả nghiên cứu cho bài toán tìm hàm nguồn của các phương trình khuếch tán. Trong những thập kỷ qua đã nhiều kỹ thuật chỉnh hóa được đề xuất cho bài toán xác định hàm nguồn, có thể kể đến: phương pháp Quasi-Reversibility (xem [8]), phương pháp Quasi-Boundary Value (xem [9]), phương pháp lặp Landweber (xem [10, 11]), phương pháp Fractional Landweber (xem [12]), phương pháp chỉnh hóa Tikhonov (xem[13, 14]), phương pháp chặt cụt Fourier truncation (xem [15]). Mục tiêu của bài báo này là tìmhàm nguồncủa bài toán bằng phương pháp Fractional Tikhonov (xem [16, 17]). Theo tìm hiểu của các các tác giả, chưa có kết quả nào về bài toán này với dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên.

2 MỘT SỐ KẾT QUẢ SƠ BỘ

2.1 Một số không gian hàm

Ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong $L^2(\Omega)$. Tồn tại cơ sở trực chuẩn $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ($\varphi_j \in H_0^1(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$) của $L^2(\Omega)$ thỏa

$$\Delta \varphi_j(x) = -\lambda_j \varphi_j(x), \quad x \in \Omega$$

trong đó $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ là các trị riêng của Δ thỏa $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_j \ldots$ và $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = \infty$. Với mỗi $m \ge 0$, định nghĩa không gian

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \left| \left\langle u, \varphi_j \right\rangle \right|^2 < +\infty \right\},$$

khi đó $H^m(\Omega)$ là không gian Hilbert với chuẩn

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \left| \left\langle u, \varphi_j \right\rangle \right|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Định nghĩa 2 (xem [7]). *Cho hàm $g \in H^m(\Omega)$ ($\mu > 0$) có dãy n các quan sát rời rạc $\langle g^{\epsilon}, \varphi_j \rangle$, $j = 1, \ldots, n$. Ước lượng phi tham số của g cho bởi*

$$g_{n(\epsilon)} = \sum_{j=1}^{n} \langle g^{\epsilon}, \varphi_j \rangle \varphi_j(x). \tag{6}$$

Bổ đề 1. *Cho $g \in H^m(\Omega)$ ($m > 0$), ta có đánh giá*

$$\mathbb{E} \left\| g_{n(\epsilon)} - g \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \epsilon^2 n(\epsilon) + \frac{1}{\lambda_{n(\epsilon)}^{2m}} \|g\|_{H^m}^2. \tag{7}$$

Trong đó $n(\epsilon) := n$ phụ thuộc vào ϵ và thỏa điều kiện $\lim_{\epsilon \to 0^+} n(\epsilon) = +\infty$.

Chứng minh. Ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|g_{n(\epsilon)}-g\right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{E}\left(\sum_{p=1}^{n}\langle g_{n(\epsilon)}-g,\varphi_j\rangle^2\right)+\sum_{j=n+1}^{\infty}\langle g,\varphi_j\rangle^2\\ &= \epsilon^2\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}W_j^2\right)+\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j^{-2m}\lambda_j^{2m}\langle g,\varphi_j\rangle^2\\ &\le \epsilon^2\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}W_j^2\right)+\frac{1}{\lambda_n^{2m}}\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j^{2m}\langle g,\varphi_j\rangle^2.\end{aligned}$$

Với giả sử $W_j=\langle W,\varphi_j\rangle \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$, điều này nghĩa là $\mathbb{E}W_j^2=1$. Ta suy ra được điều cần chứng minh.

2.2 Công thức của hàm nguồn

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu nghiệm mild của bài toán giá trị đầu sau

$$\begin{cases}\partial_t^\alpha u(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=0, \quad x\in\partial\Omega, & t\in(0,T],\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega.\end{cases} \tag{8}$$

Dùng phương pháp tách biến để tìm nghiệm của (8).Giả sử rằng $u\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ có biểu diễn chuỗi Fourier như sau

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\varphi_j(x), \quad u_j(t)=\left\langle u(\cdot,t),\varphi_j\right\rangle. \tag{9}$$

Từ (9), ta có

$$u_j(t)=\exp\left(-\lambda_j t^\alpha\alpha^{-1}\right)u_{0,j}+\left\langle f,\varphi_j\right\rangle\int_0^t s^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda_j\left(t^\alpha-s^\alpha\right)\alpha^{-1}\right)\mathrm{d}s. \tag{10}$$

Cho $t=T$ và $u_{0,j}=0$, ta nhận được

$$g_j(x)=u_j(T)=\left\langle f,\varphi_j\right\rangle\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\right)\mathrm{d}s. \tag{11}$$

Từ (11), ta có

$$f_j=\frac{\left\langle g,\varphi_j\right\rangle}{\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\right)\mathrm{d}s}$$

nghĩa là

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left\langle g,\varphi_j\right\rangle\varphi_j(x)}{\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\right)\mathrm{d}s}. \tag{12}$$

2.3 Tính không chỉnh

Ta định nghĩa toán tử tuyến tính $T: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ như sau:

$$\begin{aligned}Tf\ \ x &= \sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_0^T s^{\alpha-1}\exp(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1})\mathrm{d}s\right]\left\langle f,\varphi_j\right\rangle\varphi_j(x)\\ &= \int_\Omega K(x,\xi)f(\xi)d\xi\end{aligned} \tag{13}$$

trong đó

$$K(x,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\big(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\big)\mathrm{d}s\Big)\varphi_j(x)\varphi_j(\xi).$$

Vì $K(x,\xi)=K(\xi,x)$, nên T là toán tử tự liên hợp. Tiếp theo ta chứng minh tính compact của nó. Giả sử ta xác định T_N như sau

$$T_N f(x)=\sum_{j=1}^{N}\Big(\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\big(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\big)\mathrm{d}s\Big)\ \big\langle f,\varphi_j\big\rangle\varphi_j(x). \tag{14}$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng T_N là một toán tử bị chặn, hữu hạn chiều. Khi đó, từ (13) và (14) ta có:

$$\big\|T_N f-Tf\big\|^2_{L^2(\Omega)}=\sum_{j=N+1}^{\infty}\Big(\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\big(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\big)\mathrm{d}s\Big)^2\Big|\Big\langle f,\varphi_j\Big\rangle\Big|^2 \tag{15}$$

Xét tích phân

$$\mathcal{V}_\alpha=\int_0^{T^\alpha} s^{\alpha-1}\exp\big(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\big)\mathrm{d}s,$$

bằng cách đặt $s^\alpha=\omega$, và sử dụng phương pháp đổi biến, ta có

$$\mathcal{V}_\alpha=\frac{1}{\alpha}\int_0^{T^\alpha}\exp\big(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\big)\mathrm{d}s\le\frac{1}{\lambda_j}\Big(1-\exp\big(-\lambda_j T^\alpha\alpha^{-1}\big)\Big)\le\frac{1}{\lambda_j}\cdot \tag{16}$$

Kết hợp (15) và (16), ta có

$$\big\|T_N f-Tf\big\|^2_{L^2(\Omega)}\le\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^2}\Big|\big\langle f,\varphi_j\big\rangle\Big|^2.$$

Nghĩa là

$$\big\|T_N f-Tf\big\|_{L^2(\Omega)}\le\frac{1}{\lambda_N}\big\|f\big\|_{L^2(\Omega)}.$$

Do đó, $\big\|T_N-T\big\|_{L^2(\Omega)}\to 0$ khi $N\to\infty$. Vậy T là toán tử compact. các giá trị kỳ dị cho toán tử tuyến tính compact tự liên hợp T là

$$\Lambda_j=\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\big(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\big)ds, \tag{17}$$

và trong không gian $L^2(\Omega)$, các vector riêng φ_j là một cơ sở trực chuẩn của nó. Từ (13),bài toán xác định hàm nguồn (1) có thể viết lại dưới dạng phương trình toán tử

$$Tf\ x\ =g\ x\ , \tag{18}$$

và theo Kirsch ([13]), ta kết luận bài toán là không chỉnh.

Định lý 1. *Bài toán xác định hàm nguồn trên là không chỉnh.*

Chứng minh. Ta chọn hàm $g(x)=\varphi_k(x)$ $(1\le k\le n)$, và dãy các quan sát tuân theo mô hình ngẫu nhiên $\langle g^\epsilon,\varphi_j\rangle=\langle g,\varphi_j\rangle+\epsilon\langle W,\varphi_j\rangle,\ (j=1,\ldots,n)$. Ước lượng thống kê của hàm giá trị đầu vào

$$g_{n(\epsilon)}=\varphi_k(x)+\sum_{j=1}^{n}\epsilon\langle W,\varphi_j\rangle\varphi_j(x)$$

Ta suy ra được

$$\mathbb{E}\big\|g_{n(\epsilon)}-g\big\|^2_{L^2(\Omega)}=\epsilon^2 n(\epsilon).$$

Hàm nguồn với dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên

$$f_{n(\epsilon)}(x)=\sum_{j=1}^{n(\epsilon)}\frac{\left\langle g_{n(\epsilon)},\varphi_j\right\rangle\varphi_j(x)}{\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\right)\mathrm{d}s}$$

Ta xét

$$f_{n(\epsilon)}(x)-f(x)=\sum_{j=1}^{n(\epsilon)}\frac{\epsilon\langle W,\varphi_j\rangle\varphi_j(x)}{\int_0^T s^{\alpha-1}\exp(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1})\mathrm{d}s}$$

Sai số giữa $f_{n(\epsilon)}(x)$ và $f(x)$ được cho bởi như sau

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|f_{n(\epsilon)}(x)-f(x)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &=\sum_{j=1}^{n}\frac{\epsilon^2\mathbb{E}\langle W,\varphi_j\rangle^2}{\left|\int_0^T s^{\alpha-1}\exp(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1})\mathrm{d}s\right|^2}\\ &\geq\frac{\epsilon^2\mathbb{E}\langle W,\varphi_n\rangle^2}{\left|\int_0^T s^{\alpha-1}\exp(-\lambda_n(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1})\mathrm{d}s\right|^2}\end{aligned}$$

trong đó

$$\left|\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda_n(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\right)\mathrm{d}s\right|^2=\left|\frac{1}{\lambda_n}\left(1-\exp\left(-\lambda_nT^\alpha\alpha^{-1}\right)\right)\right|^2\leq\frac{1}{\lambda_n^2}$$

vì thế ta có được

$$\mathbb{E}\left\|f_{n(\epsilon)}(x)-f(x)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\geq\lambda_n^2\epsilon^2.$$

Khi $d=2$, bằng cách chọn $n(\epsilon)=1/\epsilon$, ta có $\lim_{\epsilon\to0}\mathbb{E}\parallel g_{n(\epsilon)}-g\parallel_{L^2(\Omega)}^2=0$, tuy nhiên

$$\lim_{\epsilon\to0}\mathbb{E}\left\|f_{n(\epsilon)}(x)-f(x)\right\|_{L^2(\Omega)}^2=\infty.$$

Ta kết luận bài toán xác định hàm nguồn là không chỉnh.

2.4 Điều kiện ổn định của hàm nguồn

Định lý 2. *Giả sử rằng hàm $f\in H^m(\Omega)$, ta có*

$$\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C\left\|f\right\|_{H^m(\Omega)}^{\frac{2}{m+1}}\left\|g\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2m}{m+1}},$$

trong đó

$$C=\left|1-\exp(-\lambda_1T^\alpha\alpha^{-1})\right|^{-2}.$$

Chứng minh. Để đơn giản, ta đặt

$$Q(\lambda_j,\alpha)=\int_0^T s^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda_j(T^\alpha-s^\alpha)\alpha^{-1}\right)\mathrm{d}s,$$

theo bất đẳng thức Holder,ta có

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\langle g,\varphi_j\rangle}{Q(\lambda_j,\alpha)}\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\left|\langle g,\varphi_j\rangle\right|^{\frac{2}{m+1}}\left|\langle g,\varphi_j\rangle\right|^{\frac{2m}{m+1}}}{\left|Q(\lambda_j,\alpha)\right|^2}\right|^2$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\langle g,\varphi_j\rangle\right|^2}{|Q(\lambda_j,\alpha)|^{2m+2}}\right)^{\frac{1}{m+1}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\langle g,\varphi_j\rangle\right|^2\right)^{\frac{m}{m+1}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\langle f,\varphi_j\rangle\right|^2}{|Q(\lambda_j,\alpha)|^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\|g\|^{\frac{m}{m+1}}_{L^2(\Omega)}$$

Trong đó

$$\left|Q(\lambda_j,\alpha)\right|^2 = \left|\frac{1}{\lambda_j}\left(1-\exp\left(-\lambda_j T^\alpha\alpha^{-1}\right)\right)\right|^2 \ge \left|\frac{1}{\lambda_j}\left(1-\exp\left(-\lambda_1 T^\alpha\alpha^{-1}\right)\right)\right|^2 \tag{19}$$

bất đẳng thức này dẫn đến

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\langle f,\varphi_j\rangle\right|^2}{\left|Q(\lambda_j,\alpha)\right|^{2m}} \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j^{2m}\left|\langle f,\varphi_j\rangle\right|^2}{\left|1-\exp(-\lambda_1T^\alpha\alpha^{-1})\right|^{2m}}. \tag{20}$$

Kết hợp (19) và (20), ta có

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left|1-\exp(-\lambda_1T^\alpha\alpha^{-1})\right|^{-2}\|f\|^{\frac{2}{m+1}}_{H^m(\Omega)}\|\xi\|^{\frac{2m}{m+1}}_{L^2(\Omega)}$$

bằng cách đặt $C = \left|1-\exp(-\lambda_1T^\alpha\alpha^{-1})\right|^{-2}$, ta thu được kết quả.

3 PHƯƠNG PHÁP FRACTIONAL TIKHONOV

Để thiết lập nghiệm chỉnh hóa cho bài toán với dữ liệu đầu vào $g \in L^2(\Omega)$, ta tìm cực tiểu phiếm hàm

$$\min_{f\in L^2(\Omega)} J_{\beta(\epsilon)}(f) = \|Kf-g\|^2_\xi + \beta(\epsilon)\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

trong đó $\beta(\epsilon)$ là tham số chỉnh hóa, $\|\cdot\|_\xi$ là nữa chuẩn có trọng được định nghĩa bởi $\|v\|_\xi = \left\|W^{\frac{1}{2}}v\right\|_{L^2(\Omega)}$ với mọi v với $W = (K^\star K)^{\xi-1}\ (1/2 \le \xi < 1)$. Bài toán cực tiểu trên có duy nhất nghiệm thỏa

$$\left((K^\star K)^{\beta(\epsilon)} + \xi I\right)f = (K^\star K)^{\xi-1}K^\star g$$

Sử dụng phân tích giá trị kỳ dị cho toán tử tuyến tính compact tự liên hợp, ta được

$$f_{\beta(\epsilon)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi-1}}{[\beta(\epsilon)]^2 + |B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi}}\langle g,\varphi_j\rangle\varphi_j(x), \quad \frac{1}{2}\le\xi\le 1, \tag{21}$$

Nếu ước lượng của g là $g_{n(\epsilon)}$ ta có

$$f^\epsilon_{\beta(\epsilon)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi-1}}{[\beta(\epsilon)]^2 + |B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi}}\langle g_{n(\epsilon)},\varphi_j\rangle\varphi_j(x), \quad \frac{1}{2}\le\xi\le 1, \tag{22}$$

và $\beta(\epsilon)$ là tham số chỉnh hóa.

Từ đây về sau, ước lượng cho $\left\|f - f^\epsilon_{\beta(\epsilon)}\right\|_{L^2(\Omega)}$ được thiết lập bởi định lý sau đây của chúng tôi và chỉ ra tốc độ hội tụ khi lựa chọn phù hợp cho tham số chỉnh hóa. Để làm được điều này, ta cần bổ đề sau

Bổ đề 2. Với hằng số $z \ge \lambda_1$ và $\frac{1}{2} \le \xi \le 1$, ta có

$$G_1(z) = \frac{z}{A^{2\xi} + \beta z^{2\xi}} \le \overline{B}(\xi, A)\beta^{-\frac{1}{2\xi}}. \tag{23}$$

trong đó $\overline{B}(\xi, A)$ độc lập với β, z.

Chứng minh. *Với $\frac{1}{2} < \xi < 1$, từ (23), giải phương trình $G_1'(z) = 0$, ta có*

$$z_0 = A(2\xi - 1)^{-\frac{1}{2\xi}}\beta^{-\frac{1}{2\xi}}.$$

Thay z_0 vào phương trình (23), ta thấy rằng

$$G_1(z) \le G_1(z_0) \le \beta^{-\frac{1}{2\xi}}\left(\frac{A^{1-2\xi}(2\xi - 1)^{-\frac{1}{2\xi}}}{2\xi}\right)$$

Bổ đề 3. *Giả sử hằng số $z \ge \lambda_1$ và $\frac{1}{2} \le \xi \le 1$, ta có*

$$G_2(z) = \frac{\beta^2 z^{2\xi - m}}{A^{2\xi} + \beta^2 z^{2\xi}} \le \begin{cases} (2\xi)^{-1}((2\xi - m)^{\frac{2\xi - m}{2\xi}} A^{-m} m^{\frac{m}{2\xi}})\beta^{\frac{m}{\xi}}, & 0 < m < 2\xi, \\ (A^{2\xi}\lambda_1^{m-2\xi})^{-1}\beta^2, & m \ge 2\xi. \end{cases}$$

Chứng minh. Xem [16].

Định lý 3. *Giả sử $f \in H^m(\Omega)$ và $g \in H^1(\Omega)$. Khi đó ta có đánh giá*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\| f - f_{\beta(\epsilon)}^{\epsilon} \right\|_{L^2(\Omega)} &\le C\sqrt{\epsilon^2 n(\epsilon) + \frac{1}{\lambda_{n(\epsilon)}^2}\left\| g \right\|_{H^1}^2}\,(\beta(\epsilon))^{-\frac{1}{2\xi}} \\ &+ \begin{cases} (2\xi)^{-1}((2\xi - m)^{\frac{2\xi - m}{2\xi}} A^{-m} m^{\frac{m}{2\xi}}) \left\| f \right\|_{H^m(\Omega)} [\beta(\epsilon)]^{\frac{m}{\xi}}, & 0 < m < 2\xi, \\ (A^{2\xi}\lambda_1^{m-2\xi})^{-1} \left\| f \right\|_{H^m(\Omega)} [\beta(\epsilon)]^2, m \ge 2\xi. \end{cases} \end{aligned}$$

trong đó $A = \left| \frac{1}{\lambda_j}\left(1 - \exp\left(-\lambda_1 T^{\alpha}\alpha^{-1}\right)\right) \right|$, C là hằng số độc lập với $n(\epsilon)$ và $\beta(\epsilon)$.

Nhận xét 4. *Cỡ mẫu và tham số chỉnh hóa được chọn sao cho*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \beta(\epsilon) = 0, \quad \lim_{\epsilon \to 0} n(\epsilon) = \infty$$

và

$$\lim_{\epsilon \to 0}(\beta(\epsilon))^{-\frac{1}{2\xi}}\sqrt{\epsilon^2 n(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \to 0}(\beta(\epsilon))^{-\frac{1}{2\xi}}(n(\epsilon))^2 = \lim_{\epsilon \to 0}[\beta(\epsilon)]^{\frac{m}{\xi}} = \lim_{\epsilon \to 0}[\beta(\epsilon)]^2 = 0.$$

Có nhiều cách chọn cỡ mẫu và tham số chỉnh hóa thỏa điều kiện trên. Một trong số đó có thể chọn $n(\epsilon) = 1/\sqrt{\epsilon}$ và tham số chỉnh hóa $\beta(\epsilon) = \epsilon^{2\xi/(m+2)}$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\left|f - f^{\epsilon}_{\beta(\epsilon)}\right|_{L^2(\Omega)} \le \underbrace{\left|f_{\beta(\epsilon)} - f^{\epsilon}_{\beta(\epsilon)}\right|_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{A}_1} + \underbrace{\left|f - f_{\beta(\epsilon)}\right|_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{A}_2}.$$

trong đó

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\, B(\lambda_j,\alpha)\,|^{2\xi-1}}{[\beta(\epsilon)]^2 + |\, B(\lambda_j,\alpha)\,|^{2\xi}} \left\langle g_{n(\epsilon)} - g, \varphi_j \right\rangle \varphi_j(x),$$

và

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|\, B(\lambda_j,\alpha)\,|^{2\xi-1}}{[\beta(\epsilon)]^2 + |\, B(\lambda_j,\alpha)\,|^{2\xi}} - \frac{1}{|\, B(\lambda_j,\alpha)\,|} \right) \left\langle g, \varphi_j \right\rangle \varphi_j(x).$$

Bước 1. Ta đánh giá cho $\left\|\mathcal{A}_1\right\|_{L^2(\Omega)}$.

Ta có

$$\left|B(\lambda_j,\alpha)\right| = \left|\frac{1}{\lambda_j}(1 - \exp(-\lambda_j T^{\alpha}\alpha^{-1}))\right| \le \frac{1}{\lambda_j}$$

và

$$|\, B(\lambda_j,\alpha)\,| = \left|\frac{1}{\lambda_j}(1 - \exp(-\lambda_j T^{\alpha}\alpha^{-1}))\right| \ge \left|\frac{1}{\lambda_j}(1 - \exp(-\lambda_1 T^{\alpha}\alpha^{-1}))\right|$$

do đó

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{A}_1^2\right\|_{L^2(\Omega)} &\le \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\left|\frac{1}{\lambda_j}\right|^{2\xi-1}}{[\beta(\epsilon)]^2 + \left|\frac{1}{\lambda_j}(1 - \exp(-\lambda_1 T^{\alpha}\alpha^{-1}))\right|^{2\xi}} \right|^2 \left\langle g_{n(\epsilon)} - g, \varphi_j \right\rangle^2 \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_j}{[\beta(\epsilon)]^2 \lambda_j^{2\xi} + |\, 1 - \exp(-\lambda_1 T^{\alpha}\alpha^{-1})\,|^{2\xi}} \right|^2 \left\langle g_{n(\epsilon)} - g, \varphi_j \right\rangle^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề 2, ta được

$$\mathbb{E}\left\|\mathcal{A}_1\right\|_{L^2(\Omega)} \le C\sqrt{\epsilon^2 n(\epsilon) + \frac{1}{\lambda_{n(\epsilon)}^{2m}}\left\|g\right\|_{H^m}^2}\,(\beta(\epsilon))^{-\frac{1}{2\xi}}. \tag{24}$$

Bước 2. Tiếp theo, ta cần đánh giá $\left\|\mathcal{A}_2\right\|_{L^2(\Omega)}$,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{A}_2^2\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi-1}}{[\beta(\epsilon)]^2+|B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi}}-\frac{1}{|B(\lambda_j,\alpha)|}\right)^2 |\left\langle g,\varphi_j\right\rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{[\beta(\epsilon)]^2}{|B(\lambda_j,\alpha)|([\beta(\epsilon)]^2+|B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi})}\right)^2 |\left\langle g,\varphi_j\right\rangle|^2, \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{[\beta(\epsilon)]^4}{([\beta(\epsilon)]^2+|B(\lambda_j,\alpha)|^{2\xi})^2}\frac{|\left\langle g,\varphi_j\right\rangle|^2}{|B(\lambda_j,\alpha)|^2} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{[\beta(\epsilon)]^4\lambda_j^{-2m}}{\left([\beta(\epsilon)]^2+\left|B(\lambda_j,\alpha)\right|^{2\xi}\right)^2}\frac{\lambda_j^{2m}\left|\left\langle g,\varphi_j\right\rangle\right|^2}{\left|B(\lambda_j,\alpha)\right|^2}\end{aligned} \tag{25}$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{A}_2^2\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}|G_2(\lambda_j)|^2 \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j^{2m}|\left\langle g,\varphi_j\right\rangle|^2}{|B(\lambda_j,\alpha)|^2} \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}|G_2(\lambda_j)|^2 \left\|f\right\|_{H^m(\Omega)}^2\end{aligned}$$

Trong đó

$$\begin{aligned}G_2(\lambda_j) &\leq \frac{[\beta(\epsilon)]^2\lambda_j^{-m}}{[\beta(\epsilon)]^2+\left|B(\lambda_j,\alpha)\right|^{2\xi}} \\ &\leq \frac{[\beta(\epsilon)]^2\lambda_j^{2\xi-m}}{[\beta(\epsilon)]^2\lambda_j^{2\xi}+\left|\frac{1}{\lambda_j}\left(1-\exp\left(-\lambda_1T^{\alpha}\alpha^{-1}\right)\right)\right|^{2\xi}}.\end{aligned}$$

Bằng cách đặt $A=\left|\frac{1}{\lambda_j}\left(1-\exp\left(-\lambda_1T^{\alpha}\alpha^{-1}\right)\right)\right|$, sử dụng bổ đề 3, ta được

$$G_2(\lambda_j)\leq\begin{cases}(2\xi)^{-1}\left((2\xi-m)^{\frac{2\xi-m}{2\xi}}A^{-m}m^{\frac{m}{2\xi}}\right)[\beta(\epsilon)]^{\frac{m}{\xi}}, & 0<m<2\xi \\ \left(A^{2\xi}\lambda_1^{m-2\xi}\right)^{-1}[\beta(\epsilon)]^2, \ m\geq 2\xi.\end{cases} \tag{26}$$

Kết hợp (25) và (26), ta có

$$\left\|\mathcal{A}_2\right\|_{L^2(\Omega)}\leq\begin{cases}(2\xi)^{-1}\left((2\xi-m)^{\frac{2\xi-m}{2\xi}}A^{-m}m^{\frac{m}{2\xi}}\right)\left\|f\right\|_{H^m(\Omega)}[\beta(\epsilon)]^{\frac{m}{\xi}}, & 0<m<2\xi \\ \left(A^{2\xi}\lambda_1^{m-2\xi}\right)^{-1}\left\|f\right\|_{H^m(\Omega)}[\beta(\epsilon)]^2, & m\geq 2\xi.\end{cases}$$

Tiếp theo, kết hợp 2 bước trên, ta có

$$
\mathbb{E}\left|f - f^{\epsilon}_{\beta(\epsilon)}\right|_{L^2(\Omega)} \le C\sqrt{\epsilon^2 n(\epsilon) + \frac{1}{\lambda^2_{n(\epsilon)}}\left\|g\right\|^2_{H^1}}\,(\beta(\epsilon))^{-\frac{1}{2\xi}}
+\begin{cases} (2\xi)^{-1}\left((2\xi-m)^{\frac{2\xi-m}{2\xi}}A^{-m}m^{\frac{m}{2\xi}}\right)\left\|f\right\|_{H^m(\Omega)}[\beta(\epsilon)]^{\frac{m}{\xi}}, & 0<m<2\xi, \\ (A^{2\xi}\lambda_1^{m-2\xi})^{-1}\left\|f\right\|_{H^m(\Omega)}[\beta(\epsilon)]^2, m \ge 2\xi. & \end{cases}
$$

Chọn $n(\epsilon) = 1/\sqrt{\epsilon}$ và tham số chỉnh hóa $\beta(\epsilon) = \epsilon^{2\xi/(m+2)}$ ta được kết quả hội tụ.

4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi đã thiết lập hàm nguồn cho bài toán khuếch tán. Với dữ liệu đầu vào bị nhiễu theo mô hình Gausian white noise, bài toán này là không chỉnh theo nghĩa Hadamard. Bằng phương pháp chỉnh hóa Tikhonov, chúng tôi đã thiết lập nghiệp chỉnh hóa đồng thời chứng minh được sự hội tụ.

LỜI CẢM ƠN

Trường Đại học Công Nghiệp TP. Hồ Chí Minh hỗ trợ kinh phí thực hiện nghiên cứu này. Nhóm tác giả cảm ơn ban biên tập, các phản biện đã đóng góp ý kiến để hoàn thiện bản thảo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A.R.Khalil, A.Yousef, M.Sababheh, “A new definition of fractional derivetive”, *J. Comput. Appl. Math.*, 264 (2014), pp. 65-70.

[2] E.Karapinar, H.D.Binh, N.H.Luc, and N.H.Can, “On continuity of the fractional derivative of the time-fractional semilinear pseudo- parabolic systems”, *Advances in Difference Equations* (2021) 2021:70.

[3] T. Abdeljawad, “On conformable fractional calculus”, *J. Comput. Appl. Math.*, 279 (2015), 57-66. 11.

[4] A. Jaiswad, D. Bahuguna, “Semilinear Conformable Fractional Differential Equations in Banach spaces”, *Differ. Equ. Dyn. Sys.*, 27 (2019), no. 1-3, pp. 313-325.

[5] A.Abdeljawad, R.P. Agarwal, E. Karapinar, P.S.Kumari, “Solutions of the Nonlinear Integral Equation and Fractional Differential Equation Using the Technique of a Fixed Point with a Numerical Experiment in Extended b-Metric Space”, *Symmetry* 2019, 11, 686.

[6] B.Alqahtani, H. Aydi, E. Karapinar, V. Rakocevic, “A Solution for Volterra Fractional Integral Equations by Hybrid Contractions”, *Mathematics*, 2019, 7, 694.

[7] N.H.Tuan, Erkan Nane, Donal O’Regan, and N.D.Phuong, “Approximation of mild solutions of a semilinear fractional differential equation with random noise”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2020.

[8] F. Yang, C. L. Fu, “The quasi-reversibility regularization method for identifying the unknown source for time fractional diffusion equation”, *Appl. Math. Model.*, 39(2015), 1500-1512.

[9] N.A.Triet and V.V.Au and L.D.Long and Dumitru Baleanu and N.H.Tuan, “Regularization of a terminal value problem for time fractional diffusion equation”, *Math Meth Appl Sci*, 2020.

[10] F. Yang, Y. P. Ren, X. X. Li, “Landweber iterative method for identifying a space dependent source for the time-fractional diffusion equation”, *Bound. Value Probl.*, 2017(1) (2017) 163.

[11] F. Yang, X. Liu, X. X. Li, “Landweber iterative regularization method for identifying the unknown source of the time-fractional diffusion equation”, *Adv. Differ. Equ.*, 2017 (1) (2017) 388.

[12] Yaozong Han, Xiangtuan Xiong, Xuemin Xue, “A fractional Landweber method for solving backward time-fractional diffusion problem”, *Computers and Mathematics with Applications*, Volume 78 (2019) 81–91.

[13] Kirsch A, “An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems”, Volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*, *Springer*, *New-York*, second edition (2011).

[14] N.H.Tuan, L.D.Long, N.V.Thinh, “Regularized solution of an inverse source problem for a time fractional diffusion equation”, *Applied Mathematical Modelling* Vol (2016), pages 1–21, doi: 10.1016/j.apm.2016.04.009.

[15] N.H.Tuan, L.D.Long, “Fourier truncation method for an inverse source problem for space-time fractional diffusion equation”, *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2017 (2017), No. 122, pp. 1-16, ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu.

RESTORE THE SOURCE FUNCTION FOR THE FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH RANDOM NOISE

NGO NGOC HUNG, NGUYEN DUC PHUONG*
Faculty of Fundamental Science, Industrial University of Ho Chi Minh City, Vietnam
*Corresponding author: nguyenducphuong@iuh.edu.vn

Abstract. In this article we consider the problem of finding the source function of the fractional diffusion equation $\partial_t^\alpha - \Delta u = f(x)$. Here we consider fractional derivatives in the Conformable sense. The input data is assumed to follow the Gassian white noise model. This problem is ill-posed in the Hadamard sense. Using the non-parametric estimation method and the Tikhonov regularization method, we establish the regularization solution and also estimate the error.

Ngày gửi bài:17/04/2023
Ngày chấp nhận đăng:02/10/2023