

# PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH VỎ TRỤ THOẢI CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

NGUYỄN MINH HIỀN<sup>1</sup>, VŨ DUY THẮNG<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> Ban Quản lý dự án đầu tư xây dựng khu vực huyện Châu Phú, tỉnh An Giang,

<sup>2</sup> Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Công nghiệp TPHCM;

\*Tác giả liên hệ: vuduythang@iuh.edu.vn

**Tóm tắt.** Bài báo trình bày phương pháp phân tích phần tử hữu hạn cho bài toán ổn định vỏ trụ thoát bằng vật liệu có cơ tính biến thiên sử dụng lý thuyết góc xoay trung bình. Nghiên cứu sử dụng phần tử hữu hạn dạng thức tổng Lagrangian và các phần tử ANS 9 nút. Vỏ trụ được liên kết gối tựa hai cạnh bên và chịu tải trọng tập trung. Ảnh hưởng của chiều dày, bậc hàm mũ biến đổi cơ tính của vật liệu được xét đến khi nghiên cứu bài toán ổn định của vỏ trụ. Hệ phương trình phi tuyến được giải bằng phương pháp điều khiển chuyển vị (Riks-Wemper). Các kết quả phân tích ổn định vỏ trụ trong nghiên cứu được so sánh với kết quả phân tích theo lý thuyết phi tuyến dạng Karman.

**Từ khóa.** góc xoay trung bình, phần tử hữu hạn, vỏ trụ thoát, vật liệu cơ tính biến thiên, ổn định kết cấu.

## 1 GIỚI THIỆU

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM: Functionally Graded Material) là loại vật liệu tổng hợp có khả năng cải thiện các đặc tính hạn chế của vật liệu composite. Vật liệu FGM được tổng hợp từ các loại vật liệu để chế tạo ra một loại vật liệu mới có các tính chất vật lý hóa học được biến đổi một cách từ từ. Sự biến đổi của tính chất vật liệu FGM thường theo một phương nào đó theo dạng hàm của tọa độ để đạt được cường độ và độ cứng mong muốn. Dạng FGM đơn giản nhất là hai loại vật liệu kết hợp với bằng cách thay đổi tỉ trọng từ loại vật liệu này sang loại vật liệu khác. Loại FGM thông dụng là kết hợp giữa gốm và kim loại thường được sản xuất trong công nghiệp. Lớp gốm sẽ cách nhiệt và giảm sự ăn mòn cũng như ô xi hóa kim loại trong khi kim loại sẽ tăng cường tính dẻo và cường độ cho vật liệu.

Vấn đề ổn định chịu uốn của vỏ FGM cũng đã được quan tâm và nghiên cứu nhiều trong thời gian gần đây. Trong [1] Shahsiah và Eslami nghiên cứu sự mất ổn định nhiệt kết cấu vỏ trụ FGM liên kết gối tựa bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Shen và Noda [2] nghiên cứu về ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ trụ sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao phi tuyến dạng Karman để nghiên cứu các phản ứng của vỏ trụ FGM sau mất ổn định dưới tác động của tải vuông góc và dọc trục trong môi trường nhiệt độ. Huang và Han [3, 4] đã nghiên cứu về sự ổn định chịu uốn của các vỏ trụ tròn FGM chịu tải trọng phân bố theo lý thuyết vỏ mỏng Donnell. Nguyễn Đình Đức nghiên cứu ổn định tĩnh phi tuyến theo lý thuyết cổ điển của vỏ FGM bằng lời giải giải tích [5], nghiên cứu ổn định của vỏ thoát FGM đối xứng liên kết biên khác nhau chịu tải trọng phân bố và nhiệt độ [6]. Trong các nghiên cứu ổn định của vỏ FGM, nhóm tác giả đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất [5] và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao [7].

Trong nghiên cứu này các tác giả sử dụng các phần tử vỏ tứ giác 9 nút ANS (Assumed Natural Strain), lý thuyết góc xoay trung bình (MRT: Moderate Rotation Theory) trên hệ tọa độ tự nhiên của vỏ trụ. Vỏ trụ thoát làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên liên kết tựa tại hai cạnh biên chịu tải trọng vuông góc tập trung tại giữa vỏ được phân tích ổn định chịu uốn. Tính chất vật liệu biến thiên theo dạng hàm mũ dọc chiều dày vỏ. Hệ phương trình phi tuyến của bài toán ổn định của vỏ trụ được giải bằng phương pháp lập điều khiển chuyển vị (Riks-Wemper [8]). Các phân tích được tiến hành nhằm đánh giá các yếu tố ảnh hưởng đến quá trình mất ổn định của vỏ trụ như sự thay đổi tỉ lệ chiều dày với bán kính, bậc của hàm biến thiên cơ tính. Các kết quả được so sánh với các kết quả từ lý thuyết phi tuyến Karman.

## 2 LÝ THUYẾT GÓC XOAY TRUNG BÌNH VỎ TRỤ CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

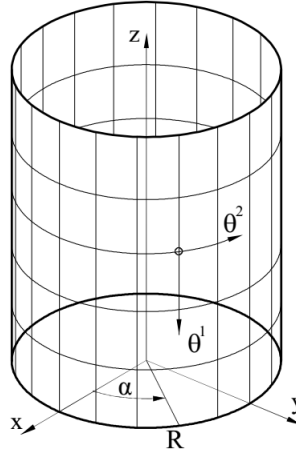
### 2.1 Lý thuyết góc xoay trung bình

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, chuyển vị ngang được giả thiết là hàm bậc nhất theo chiều dày của kết cấu, chuyển vị đứng được giả thiết là hằng số:

$$v_{\alpha} = v_{\alpha} + \theta^3 v_{\alpha} \quad (1)$$

$$v_3 = v_3 \quad (2)$$

Trong đó  $\nu_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) là các chuyển vị ngang và  $\nu_3$  là chuyển vị đứng của một điểm bất kỳ của vỏ nằm ngoài mặt phẳng trung bình;  $\nu_\alpha^0$  là các chuyển vị ngang và  $\nu_3^0$  là chuyển vị đứng tại mặt phẳng trung bình;  $\nu_\alpha^1$  là các góc xoay quanh các trục tọa độ  $\theta^\alpha$  tương ứng (hình 1),  $\theta^3$  là tọa độ theo phương chiều dày của vỏ.



Hình 1: Hệ tọa độ trụ.

Các thành phần ten xơ biến dạng của vỏ theo lý thuyết góc xoay trung bình có dạng:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \varepsilon_{\alpha\beta}^1 + \theta^3 \varepsilon_{\alpha\beta}^2 + (\theta^3)^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^3 \quad (3)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}^0 = \varepsilon_{\alpha 3}^1 + \theta^3 \varepsilon_{\alpha 3}^2 \quad (4)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (5)$$

với các thành phần biến dạng tiếp tuyến:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} \left( \varphi_{\alpha\beta}^0 + \varphi_{\beta\alpha}^0 \right) + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha 3}^0 \varphi_{\beta 3}^0 \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} \left( \varphi_{\alpha\beta}^1 + \varphi_{\beta\alpha}^1 \right) - \frac{1}{2} \left( b_\alpha^\lambda \varphi_{\lambda\beta}^0 + b_\beta^\lambda \varphi_{\lambda\alpha}^0 \right) + \frac{1}{2} \left( \varphi_{\alpha 3}^0 \varphi_{\beta 3}^0 + \varphi_{\beta 3}^0 \varphi_{\alpha 3}^0 \right) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (8)$$

và các thành phần biến dạng cắt:

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^0 = \varphi_{\alpha 3}^0 + \nu_\alpha^1 + \nu_\alpha^1 \varphi_{\lambda\alpha}^0 + \frac{1}{2} \nu_3^1 \left( \varphi_{\lambda 3}^0 - \nu_\alpha^1 \right) \quad (9)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^1 = \nu_{3,\alpha}^1 + \nu_\alpha^1 \nu_{\lambda|\alpha}^1 - \frac{1}{2} \nu_{3,\lambda}^1 \varphi_{\alpha}^{\lambda 0} \quad (10)$$

Trong các công thức từ (6) đến (10), ta có các thành phần:

$$\varphi_{\alpha\beta}^n = \nu_{\alpha|\beta}^n - b_{\alpha\beta}^n \nu_3^n \quad (11)$$

$$\varphi_{\alpha 3}^n = \nu_{3|\alpha}^n + b_\alpha^\lambda \nu_\lambda^n$$

với  $n = 0, 1$  và  $b_{\alpha\beta}$  là ten xơ độ cong của vỏ.

Trong các phương trình từ (6) đến (10), các thành phần phi tuyến được gạch dưới. Nếu chỉ giữ lại thành phần phi tuyến có chứa  $\varphi_{\alpha 3}^n$  ta thu được lý thuyết phi tuyến biến dạng cắt bậc nhất dạng Karman

### 2.2 Hàm biến thiên cơ tính

Hệ số Poisson  $\nu$  của vật liệu được giả thiết là không đổi. Mô đun đàn hồi của vật liệu FGM được giả thiết là một hàm biến thiên dạng mũ theo chiều dày của vỏ:

$$E(\theta^3) = E_b + (E_t - E_b)V_f \quad (12)$$

với  $E_b$  là mô đun đàn hồi của vật liệu mặt dưới vỏ ( $\theta^3 = -h/2$ );  $E_t$  là mô đun đàn hồi của vật liệu mặt trên vỏ ( $\theta^3 = h/2$ );  $h$  là chiều dày vỏ; hàm tỉ lệ lượng thể tích:

$$V_f = \left( \frac{1}{2} + \frac{\theta^3}{h} \right)^n \quad (13)$$

### 2.3 Quan hệ ứng suất biến dạng

Mối quan hệ ứng suất biến dạng đối với vật liệu FGM có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{Bmatrix} {}_0\sigma^{11} \\ {}_0\sigma^{22} \\ {}_0\sigma^{12} \\ {}_0\sigma^{32} \\ {}_0\sigma^{31} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{Bmatrix}}_{\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [B] \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} {}_0\varepsilon_{11} \\ {}_0\varepsilon_{22} \\ 2 \cdot {}_0\varepsilon_{12} \\ 2 \cdot {}_0\varepsilon_{32} \\ 2 \cdot {}_0\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Trong đó:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(\theta^3)}{1-\nu^2}; \quad C_{21} = C_{12} = \frac{\nu E(\theta^3)}{1-\nu^2}; \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(\theta^3)}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

Quan hệ ứng suất biến dạng cho kết cấu vỏ trụ FGM có thể biểu diễn như sau:

$$\{ {}^k\sigma \} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} {}^0[A] & {}^1[A] & {}^2[A] \\ {}^1[A] & {}^2[A] & {}^3[A] \\ {}^2[A] & {}^3[A] & {}^4[A] \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} {}^0[B] & {}^1[B] \\ {}^1[B] & {}^2[B] \end{matrix} \end{bmatrix} \{ {}^k\varepsilon \} \quad (16)$$

Hay dưới dạng rút gọn:

$$\{ {}^m\sigma \} = [H] \cdot \{ {}^m\varepsilon \} \quad (17)$$

với

$$[A] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [A](\theta^3)^n \mu d\theta^3 \quad (18)$$

$$[B] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [B](\theta^3)^m \mu d\theta^3 \quad (19)$$

trong đó  ${}^0\mu = 1 + \frac{\theta^3}{R}$  là định thức của ten xơ chuyển của vỏ trụ.

### 2.4 Dạng thức tổng Lagrangian

Để tránh hiện tượng nghẽn (locking phenomenon), kỹ thuật ANS (Assumed Natural Strain) được đề xuất bởi Park và Stanley [9]. Bản chất của kỹ thuật này nằm ở việc nội suy các thành phần biến dạng trong tọa độ tự nhiên dựa trên các thành phần biến dạng giả định tại các điểm tích phân. Dựa trên dạng thức tổng Lagrangian và áp dụng các phần tử ANS 9 nút, phương trình cân bằng của vỏ trụ có dạng:

$$\left( [{}^1K_u] + [{}^1K_g] \right) \{q\} = \{{}^2R\} - \{{}^1F\} - J \quad (20)$$

trong đó:

$$[{}^1K_u] = \int_{\Omega} [B_L]^T [H] [B_L] d\Omega \quad (22)$$

$$[{}^1K_g] = \int_{\Omega} [G]^T [N]^T [{}^1S] [G] [N] d\Omega \quad (23)$$

$$\{{}^1F\} = \int_{\Omega} [B_L]^T \{ {}_0^1\sigma \} d\Omega \quad (24)$$

với  $[{}^1K_u]$ ,  $[{}^1K_g]$  là ma trận độ cứng chuyển vị và ma trận độ cứng hình học;  $\{{}^2R\}$  là véc tơ tải trọng;  $J$  là các thành phần phi tuyến còn lại.

Đối với thành phần biến dạng tuyến tính, các ma trận  $[B_L]$ ,  $[G]$ ,  $[{}^1S]$  có dạng:

$$[B_L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} & \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} & \frac{1}{R^2} & 0 & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} & \frac{\partial}{\partial \theta^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{\partial}{\partial \theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[{}^1S] = \begin{bmatrix} {}^0L_{11} & \frac{1}{R} {}^0L_{12} & -\frac{1}{R} {}^1L_{12} \\ \frac{\xi}{\sin \varphi} {}^0L_{12} & \frac{1}{R^2} {}^0L_{22} & -\frac{1}{R^2} {}^1L_{22} \\ -\frac{1}{R} {}^1L_{12} & -\frac{1}{R^2} {}^1L_{22} & \frac{1}{R^2} {}^2L_{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Đối với thành phần biến dạng cắt, các ma trận  $[B_L]$ ,  $[G]$ ,  $[{}^1S]$  có dạng:

$$[B_L] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta^2} & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[{}^1S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^0L_{13} & 0 & {}^0L_{23} & 0 & {}^1L_{13} & \frac{1}{R} {}^1L_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^0L_{13} & 0 & {}^0L_{23} & 0 & 0 & {}^1L_{13} & \frac{1}{R} {}^1L_{23} \\ {}^0L_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^0L_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^0L_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^0L_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1L_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} {}^1L_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1L_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} {}^1L_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Trong đó  ${}^nL_{ij}$  là các thành phần của ten xơ ứng suất  $\{{}^k\sigma\}$  tương ứng với các thành phần của ten xơ biến dạng  $\{{}^k\varepsilon\}$ . Hệ phương trình phi tuyến (20) được giải bằng phương pháp điều khiển chuyển vị Riks-Wemper để tìm lời giải ổn định và mất ổn định chịu uốn của vỏ trụ.

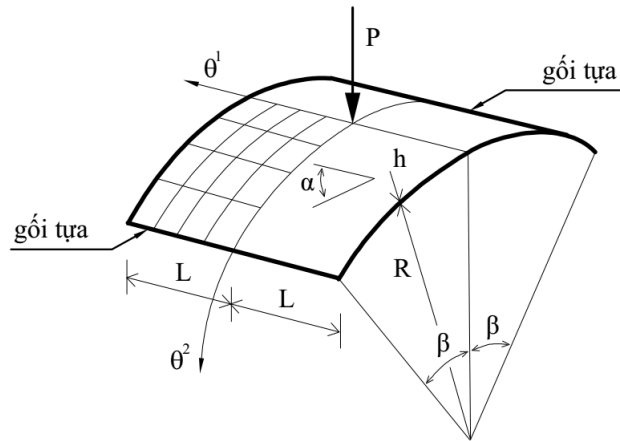
### 3 MÔ PHỎNG SỐ

Bảng 1: Thông số vật liệu của vỏ trụ.

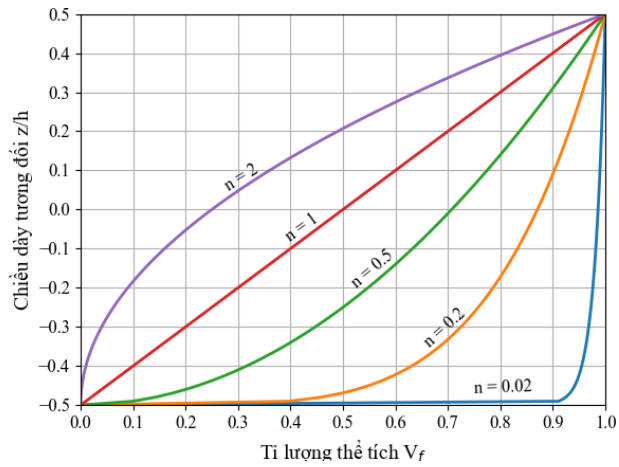
Vật liệu	Nhôm	Zirconia
Mô đun đàn hồi (GPa)	$E_b = 70$	$E_t = 151$
Hệ số poisson	0,3	0,3

Xét vỏ trụ có biên liên kết gối tựa tại hai cạnh thẳng chịu tải trọng tập trung P vuông góc với bề mặt tại điểm giữa vỏ trụ như trên Hình 2. Vỏ trụ có bán kính cong  $R$ , chiều dài  $2L = R/5$ , chiều dày vỏ  $h$  (chọn các tỉ lệ  $h/R$  là 1/100, 1/200, 1/300, 1/500), góc  $\beta = 0,1$  rad. Vỏ trụ cấu tạo bằng vật liệu có cơ tính biến thiên với bề mặt dưới là nhôm và bề mặt trên là Zirconia. Tỉ lượng theo thể tích của vật liệu (volume fraction)  $V_f$  là hàm bậc  $n$  được khảo sát với các giá trị  $n = 0,002; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0$  như trên Hình 3. Các thông số hình học và vật liệu cho trong Bảng 1. Vì tính đối xứng của vỏ trụ theo hai phương nên ta chỉ cần xây dựng mô hình cho  $1/4$  vỏ trụ, với các điều kiện chuyển vị và góc xoay tại các trục đối xứng theo phương đối xứng bằng không. Bài toán sử dụng lưới phần tử  $4 \times 4$  cho phần tử ANS 9 nút dựa trên kết quả phân tích

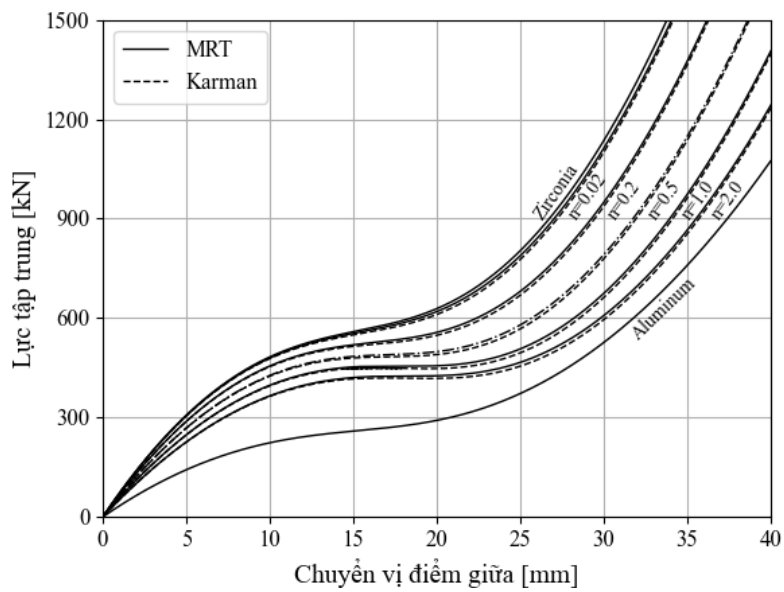
của Kreja và cộng sự [10] về lưới phần tử cho của tấm vỏ trụ đồng chất.



Hình 2: Kích thước và lưới phần tử của vỏ trụ thoải.

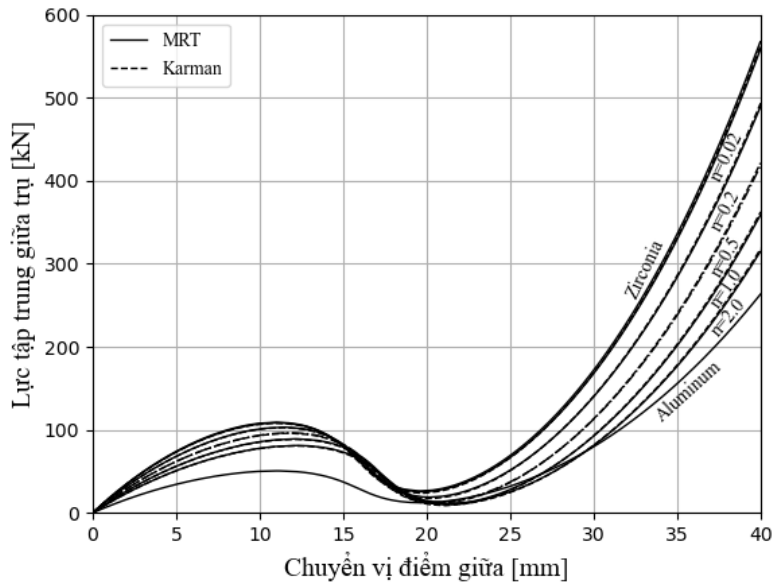


Hình 3: Hàm tỉ lượng theo thể tích  $V_f$ .



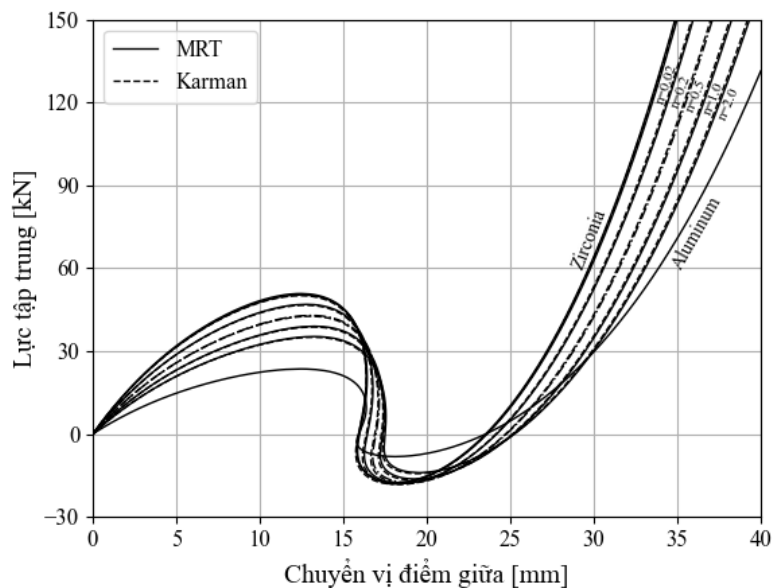
Hình 4: Chuyển vị của điểm giữa vỏ trụ khi  $R/h = 100$ .

Hình 4 thể hiện đồ thị chuyển vị tại vị trí tác dụng lực của vỏ trụ FGM tỉ lệ  $h/R = 1/100$  với các giá trị bậc  $n$  của hàm tỉ lệ khác nhau. Khi giá trị  $n$  của hàm số mũ vật liệu tăng nghĩa là hàm lượng nhôm trong vật liệu tăng và hàm lượng gốm giảm dẫn đến độ cứng của vỏ trụ giảm. Điều này dẫn tới đồ thị chuyển vị thoải dần, giá trị chuyển vị tăng và đường cong chuyển vị tiên gần với đường cong chuyển vị của vật liệu nhôm hơn. Ngược lại, khi  $n$  giảm thì độ cứng của vỏ tăng, biến dạng của vỏ trụ giảm. Trên các đồ thị chưa thấy xuất hiện điểm nhảy (snap-through) của chuyển vị. Trên hình cũng thể hiện có sự khác biệt giữa kết quả chuyển vị theo lý thuyết góc xoay trung bình và kết quả chuyển vị theo lý thuyết Karman.



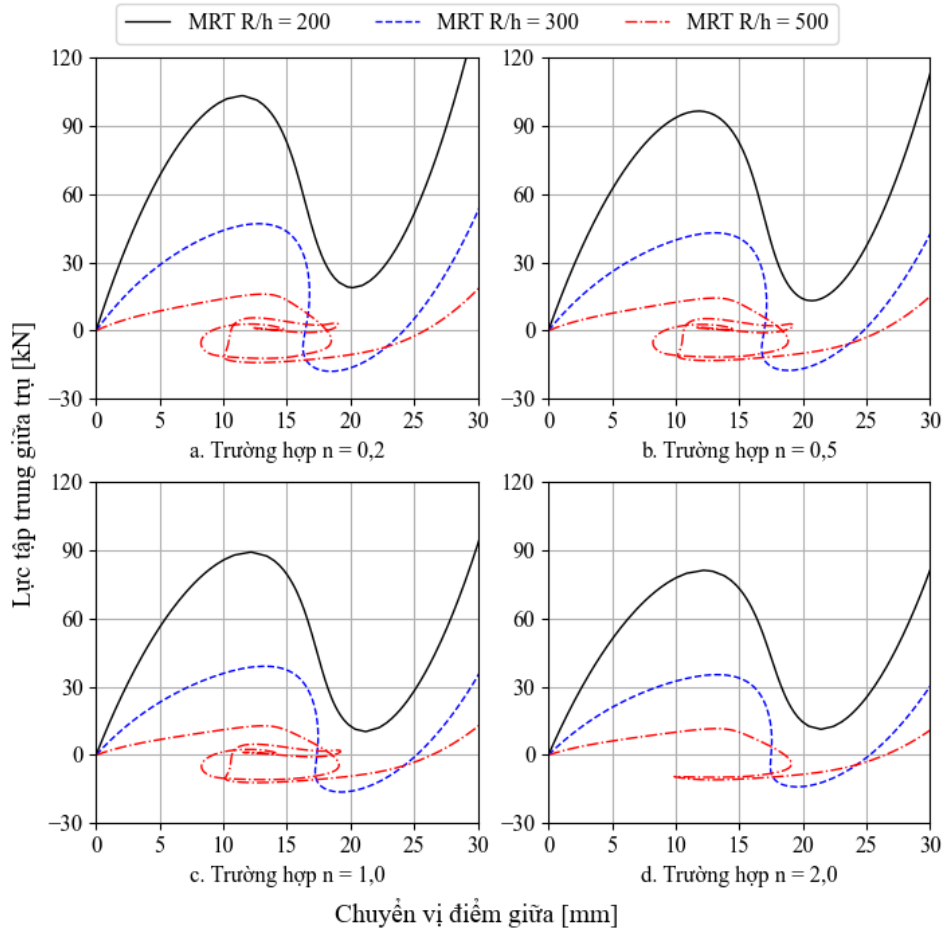
Hình 5: Chuyển vị của điểm giữa vỏ trụ khi  $R/h = 200$ .

Tiếp tục khảo sát vỏ trụ với tỉ lệ  $h/R = 1/200$ , đồ thị chuyển vị của điểm đặt lực với các giá trị  $n$  khác nhau được thể hiện trên Hình 5. Khi giá trị  $n$  của hàm số mũ vật liệu tăng, lực tới hạn của vỏ trụ giảm. Do tỉ lệ  $h/R$  giảm, độ mảnh của vỏ tăng nên dễ gây mất ổn định hơn vỏ trụ  $h/R = 1/100$ . Các đồ thị chuyển vị đã xuất hiện điểm nhảy (snap-through), nghĩa là sau khi đạt tới giá trị lực tới hạn thì lực tác dụng lên vỏ trụ giảm nhưng chuyển vị vẫn tiếp tục tăng.



Hình 6: Chuyển vị của điểm giữa vỏ trụ khi  $R/h = 300$ .

Tiếp tục khảo sát vỏ trụ với tỉ lệ  $h/R = 1/300$ , trên Hình 6 ta có thể quan sát đồ thị chuyển vị của điểm đặt lực với các giá trị  $n$  khác nhau. Tương tự các trường hợp khảo sát phía trên, khi giá trị  $n$  của hàm số mũ vật liệu tăng, lực tới hạn của vỏ trụ giảm. Trên đồ thị đã xuất hiện cả hiện tượng snap-through và hiện tượng snap-back (đường chuyển vị có xu hướng quay ngược lại). Trong các trường hợp  $h/R = 1/200$  và  $h/R = 1/300$ , sự khác biệt kết quả chuyển vị giữa lý thuyết góc xoay trung bình và lý thuyết Karman là tương đối nhỏ.



Hình 7: Chuyển vị của điểm giữa vỏ trụ khi  $n = 0,2$ ;  $n = 0,5$ ;  $n = 1,0$ ;  $n = 2,0$ .

Hình 7 thể hiện đồ thị chuyển vị của các vỏ trụ FGM với tỉ lệ chiều dày trên bán kính  $h/R$  thay đổi trong trường hợp các hệ số mũ  $n$  lần lượt là 0,2; 0,5; 1,0 và 2,0. Ta nhận thấy rằng sự mất ổn định của vỏ trụ bị ảnh hưởng bởi độ mảnh của vỏ. Kết quả ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dày, hệ số mũ  $n$  đến lực tới hạn (giá trị lực tác dụng khi bắt đầu xuất hiện snap-through trên đồ thị chuyển vị tại giữa vỏ trụ) của vỏ trụ theo lý thuyết góc xoay trung bình được thể hiện trên Bảng 2 cũng thể hiện xu hướng này. Khi tỉ lệ  $h/R$  nhỏ hơn  $1/300$  thì đồ thị chuyển vị trở nên phức tạp và xảy ra hiện tượng snap-through và snap-back nhiều lần sau khi mất ổn định. Khi tỉ lệ  $h/R = 1/500$ , ảnh hưởng của hệ số mũ  $n$  đến sự thay đổi trạng thái mất ổn định của vỏ trụ trở nên rõ ràng hơn.

Bảng 2: Lực tới hạn  $P_{th}$ [kN] của vỏ trụ theo lý thuyết góc xoay trung bình.

$n$	Zirconia	0,02	0,2	0,5	1,0	2,0	Nhôm
$h/R = 1/200$	109,0277	108,3755	103,0879	96,3524	89,0482	81,0923	50,5428
$h/R = 1/300$	50,8085	50,3650	46,9264	42,9103	38,9915	35,2727	23,5536
$h/R = 1/500$	17,8118	17,5984	16,0091	14,3021	12,8080	11,5911	8,2571



#### 4 MÔ PHỎNG SỐ

Bài báo đã phân tích phần tử hữu hạn cho bài toán ổn định của vỏ trụ FGM dựa trên phương pháp tổng Lagrange. Lý thuyết góc xoay trung bình được xây dựng trên hệ tọa độ tự nhiên và triển khai trên phần tử ANS 9 nút. Phương pháp điều khiển chuyển vị (Riks-Wempner) được sử dụng để giải hệ phương trình phi tuyến. Từ các kết quả phân tích ổn định vỏ trụ thoải liên kết gối tựa chịu tải trọng tập trung cho các trường hợp  $h/R$  lần lượt bằng 1/100; 1/200; 1/300; 1/500, có thể đưa ra một số nhận xét sau:

1. Các kết quả chuyển vị theo lý thuyết góc xoay trung bình có khác biệt so với kết quả chuyển vị theo lý thuyết Karman. Do trong phương trình biến dạng có thêm các thành phần phi tuyến so với lý thuyết Karman nên độ cứng của vỏ lớn hơn, kết quả chuyển vị theo lý thuyết góc xoay trung bình nhỏ hơn, vỏ có xu hướng dễ mất ổn định hơn.
2. Trạng thái mất ổn định của vỏ trụ bị ảnh hưởng bởi độ mảnh của vỏ (tỉ lệ chiều dày so với bán kính  $h/R$ ). Khi vỏ trụ  $h/R = 1/100$  chưa xuất hiện tượng snap-through trên các đồ thị chuyển vị. Khi giá trị  $h/R = 1/200$ , đồ thị chuyển vị xuất hiện hiện tượng snap-through. Khi  $h/R = 1/300$  và  $h/R = 1/500$ , xuất hiện hiện tượng snap-through và snap-back trong quá trình mất ổn định của vỏ trụ tại vị trí điểm đặt lực.
3. Trạng thái mất ổn định của vỏ trụ cũng phụ thuộc vào tỉ lệ các thành phần vật liệu thể hiện qua giá trị bậc  $n$  của hàm biến đổi cơ tính vật liệu. Khi  $n$  tăng thì hàm lượng kim loại và hàm lượng gốm giảm dẫn đến độ cứng trong vỏ giảm làm tăng độ mất ổn định của vỏ.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Shahsiah, R. and Eslami, M. R. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell, *Journal of Thermal Stresses*, vol. 26 no. 3. pp. 277-294, 2003.
- [2] Shen, H. S. and Noda, N. Postbuckling of FGM cylindrical under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 4641-4662, 2005.
- [3] Huang, H. and Han, Q. Research on nonlinear postbuckling of functionally graded cylindrical shells under radial loads, *Composite Structures*, vol. 92, pp. 1352-1357, 2010.
- [4] Huang, H., Han, Q. Wei, D. Buckling of FGM cylindrical shells subjected to pure bending load, *Composite Structures*, vol. 93, pp. 2945-2952, 2011.
- [5] Duc, N. D. *Nonlinear Static and Dynamic Stability of Functionally Graded Plates and Shells*, Vietnam National University Press, pp. 724, Hanoi, 2014.
- [6] Duc, N. D. and Quan, T. Q. Nonlinear postbuckling of imperfect double curved thin FGM shallow shell on elastic functionally subjected to mechanical loads, *J. Mech. Copos. Mater.*, vol. 49 no. 5, pp. 493-506, 2013.
- [7] Duc, N. D., Thang, P. T., Dao, D. N., Tac, H. V. Nonlinear buckling of higher deformable S-FGM thick circular cylindrical shells with metal-ceramic- metal layers surrounded on elastic functionally in thermal environments, *F. of Composite Structures*, vol. 121, pp. 134-141, 2015.
- [8] Ramm, E. The Riks/Wempner approach - an extension of the displacement control method in nonlinear analyses, *Recent Advances in Non-linear Computational Mechanics*, Pineridge Press Ltd, Swansea, pp. 62-86, 1982.
- [9] Park, K. C. and Stanley, G. M. A curved  $C^0$  shell element based on assumed natural-coordinate strains, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, vol. 53, pp. 278-290, 1986.
- [10] Kreja, I., Schmidt, R., Reddy, J.N. Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures, *Int. Journal Non-Linear Mechanics*, vol 32, pp. 1123-1142, 1997.

## STABILITY ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELLS

NGUYEN MINH HIEN<sup>1</sup>, VU DUY THANG<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> *Construction Investment Project Management Board Chau Phu, An Giang,*

<sup>2</sup> *Faculty of Civil Engineering, Industrial University of HoChiMinh city;*

\* *Corresponding author: vuduythang@iuh.edu.vn*

**Abstract.** The paper presents the stability finite element analysis for the functionally graded cylindrical shells according to the moderate rotation theory. The study employs ANS 9-node elements and total Lagrangian finite element form. The cylindrical shells are connected by two sides and subjected to a concentrated load. The effect of thickness and the degree of variation of the material's mechanical properties are considered. The nonlinear equations are solved by the Riks-Wemper displacement control method. The stability analysis results of the functionally graded cylindrical shells are compared with those obtained by nonlinear Karman theory.

**Keywords.** moderate rotation theory, finite element analysis, functionally graded material, cylindrical shell, structural stability.

*Ngày gửi bài: 12/10/2023*

*Ngày chấp nhận đăng: 29/02/2024*