SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH CHẤT COMPACT CỦA TẬP NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐA TRỊ CHỨA TOÁN TỬ LIÊN HỢP

VÕ NGỌC MINH[1], VÕ VIẾT TRÍ[2,*]
[1] *Khoa Toán-Tin Học, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, Thành phố Hồ Chí Minh*
[2] *Khoa sư phạm, Trường Đại học Thủ Dầu Một*
[*] *Tác giả liên hệ: trivv@tdmu.edu.vn*
DOIs: https://doi.org/10.46242/jstiuh.v58i04.4506

Tóm tắt. Trong bài báo này chúng tôi thiết lập sự tồn tại và tính chất compact cho tập nghiệm của phương trình vi phân đa trị chứa toán tử tự liên hợp với bậc khác nhau $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Phương pháp chúng tôi dựa trên việc sử dụng độ đo phi compact nhận trị trong không gian có thứ tự.
Từ khóa: toán tử đa trị, độ đo phi compact, phương trinh vi phân, toán tử liên hợp.

1. GIỚI THIỆU VÀ CHUẨN BỊ

Trong bài viết này chúng ta ký hiệu T là một số thực dương, Ω là một miền bị chặn với biên đủ trơn của không gian $\mathbb{R}^N$. Xét bài toán tìm hàm $u = u(t, x)$ thỏa

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \mathcal{K}\mathcal{A}^{\sigma_1}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \mathcal{A}^{\sigma_2}u(t,x) \in F(t,u(t)), (t,x) \in (0,T] \times \Omega \\ u(0,x) = h(x), \qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

ở đó $\mathcal{K}$ là hằng số dương và $\mathcal{A}$ là toán tử tự liên hợp với bậc $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2\}$ tùy ý trên không gian Hilbert $\mathcal{H}$ với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$, nghĩa là $\langle \mathcal{A}^\sigma u, w\rangle = \langle u, \mathcal{A}^\sigma w\rangle$ (chẳng hạn như $\mathcal{A} = -\Delta$), $h \in \mathcal{H}$. Đã có nhiều nghiên cứu về sự tồn tại và duy nhất nghiệm (ví dụ như Gorenflo & cs (2014), Hung & Tri (2020), Tri & Karapinar (2020), Tri & Rezapour (2021)), tính ổn định của nghiệm với dữ liệu quan sát của hàm nguồn bị nhiễu,... của bài toán trên với F là hàm đơn trị hay với đạo hàm cấp không nguyên (chẳng hạn như Ngoc & cs (2021), Tuan & cs (2021), Tuan & Caraballo (2021)). Tuy nhiên trong các lý thuyết điều khiển thì bài toán thường gặp với hàm nguồn F là hàm đa trị. Ngoài việc xem xét sự tồn tại và tính liên tục của tập nghiệm thì tính chất compact của tập nghiệm cũng thường được quan tâm. Với mục đích đó, trong bài báo này chúng tôi thiết lập sự tồn tại nghiệm và tính compact cho tập nghiệm của bài toán (1.1).

Cho E là không gian Banach và $(C, \leq)$ là tập sắp thứ tự bộ phận. Một ánh xạ φ từ họ các tập con $\mathcal{Y}$ nào đó của E vào C gọi là độ đo phi compact trên $\mathcal{Y}$ nếu $\varphi(\overline{co}(D)) = \varphi(D)$ với D là tập con tùy ý của $\mathcal{Y}$. Ánh xạ đa trị $F: E \to \mathcal{Y}$ gọi là cô đặc theo độ đo φ (hay gọn hơn là φ-cô đặc) nếu với mọi $D \in \mathcal{Y}$ thỏa $\varphi(D) \leq \varphi(F(D))$ dẫn đến D là tập compact tương đối trong E.

Ngoài các phương pháp sử dụng quen thuộc như các đánh giá bởi khai triển Fourier của phần tử trong không gian Hilbert tách được, bất đẳng thức Gronwall chúng tôi sử dụng một độ đo phi compact trong không gian có thứ tự sinh bởi nón lồi có đỉnh để xem xét bài toán điểm bất động cho một ánh xạ đa trị cô đặc.

Trong suốt bài báo này chúng ta ký hiệu $\dot{N} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $\mathcal{P}(E)$ (tương ứng, $b(E), K(E), Kv(E)$) là tập tất cả các tập con khác rỗng của E (tương ứng, bị chặn, compact, lồi và compact), ký hiệu $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$ là không gian các hàm liên tục từ $[0,T]$ vào không gian Hilbert $\mathcal{H}$ với chuẩn $\| u \| = \sup_{t\in[0,T]} \| u(t,.) \|_{\mathcal{H}}$, với $u \in \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$, dãy $\{f_n\}$ trong $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$ gọi là hội tụ yếu (tương ứng, hầu hết) về f (viết $f_n \rightharpoonup f_0$) nếu $\langle f_n(s), f(s)\rangle$ hội tụ về 0 trong $\mathbb{R}$ với mọi (tương ứng, hầu hết) s $\in$[0, T]. Trong bài báo này chúng tôi sử dụng $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$.

Chúng tôi xem xét bài toán (1.1) với $F: [0,T] \times \mathcal{H} \to Kv(\mathcal{H})$ thỏa các điều kiện (H) sau:

(Ha) Với mỗi $v \in \mathcal{H}$, hàm $t \mapsto F(t,v)$ có hàm chọn đo được, nghĩa là, tồn tại hàm đo được $f_v(.) : [0,T] \to \mathcal{H}$ thỏa $f_v(t) \in F(t,v)$.

(Hb) Ánh xạ đa trị $F(t,.): \mathcal{H} \to Kv(\mathcal{H})$ là nửa liên tục trên với hầu hết $t \in [0,T]$,

(Hc) tồn tại $\alpha \in L^1((0,T);\mathbb{R})$ để cho

$$\| |F(t,u)| \| := \sup_{v\in F(t,u)} \| v \|_{\mathcal{H}} \leq \alpha(t)(1 + \| u \|_{\mathcal{H}}) \text{ hầu hết } t \in (0,T) \text{ và mọi } u \in \mathcal{H}.$$

© 2022 Trường Đại học Công nghiệp thành phố Hồ Chí Minh

(Hd). Tồn tại $B \in L^1((0,T);\mathbb{R})$ để cho

$$\chi\big(F(t,D)\big) \le B(t)\chi(D) \text{ hầu hết } t \in (0,T), \text{với mọi } D \in b(\mathcal{H}),$$

ở đó χ là độ đo Hausdorff phi compact trong $\mathcal{H}$ được định nghĩa bởi

$$\chi(D) = \inf\{\varepsilon > 0: D \text{ có } \varepsilon\text{-lưới hữu hạn }\}$$

Để thiết lập các kết quả chính chúng tôi cần đến các kết quả sau bạn đọc có thể tìm thấy trong (Kamenskii & cs, Definition 2.1.1, Corollary 3.3.1, Propositions 3.5.1).

Bổ đề 1.1. *Cho E là không gian Banach và χ là một độ đo Hausdorrf xác định trên họ ß các tập con nào đó của E. Khi đó:*

(a) Đơn điệu: nếu $D_1 \subset D_2$ dẫn đến $\chi(D_1) \le \chi(D_2)$, với $D_1, D_2 \in$ ß.

(b) Nửa cộng tính: $\chi(D_1 + D_2) \le \chi(D_1) + \chi(D_2)$ với mọi $D_1, D_2 \in$ ß.

(c) Không kỳ dị: $\chi(\{a\} \cup D) = \chi(D)$ với mọi $a \in E, D \in$ ß.

(d) Chính quy: $\chi(D) = 0$ khi và chỉ khi D compact tương đối, $D \in$ ß.

(e) Nửa thuần nhất: $\chi(\lambda D) = |\lambda|\chi(D)$ với $\lambda \in \mathbb{R}, D \in$ ß.

Với ánh xạ đa trị $\mathcal{M}: E \to \mathcal{P}(E)$, tập các điểm bất động của $\mathcal{M}$ ký hiệu là $\text{Fix}(\mathcal{M}) = \{x \in E: x \in \mathcal{M}(x)\}$.

Bổ đề 1.2. *Nếu M là tập con lồi đóng của không gian Banach E và $\mathcal{M}: M \to Kv(M)$ là ánh xạ đóng, β-cô đặc, ở đây β là độ đo phi compact thỏa $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ với mọi $a \in M$, và $\Omega \in b(M)$ thì ta có $Fix\,(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.*

Bổ đề 1.3. *Cho M là một tập đóng trong không gian Banach E và $\mathcal{M}: M \to K(M)$ là ánh xạ đa trị cô đặc theo độ do phi compact đơn điệu β xác định trên họ các tập con bị chặn của E. Khi đó, nếu tập $Fix\,(\mathcal{M})$ bị chặn thì nó là tập compact.*

Ngoài ra trong các đánh giá chúng tôi cần dùng đến kết quả sau đây:

Bổ đề 1.4. (Gronwall) *Cho $a \ge 0, 0 < T < \infty$ và các hàm $\beta, \mu: [0,T] \to \mathbb{R}_+$ liên tục thỏa*

$$\mu(t) \le a + \int_0^t \beta(s)\mu(s)ds,\ t \in [0,T].$$

Khi đó $\mu(t) \le ae^{\int_0^t \beta(s)ds}$.

Kết quả sau đây cũng được dùng đến cho kết quả của chúng tôi. Cho trước khoảng đóng và bị chặn $[0,M]$ của $\mathbb{R}$. Khi đó tồn tại số $C(M) > 0$ để cho

$$|e^x - e^y| \le C(M)|x - y| \text{ với mọi } x, y \in [0,M]. \tag{1.2}$$

2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ TÍNH COMPACT

Với mỗi $u \in C([0,T];\mathcal{H})$ ta định nghĩa tập

$$\mathcal{S}_F(u) = \{f \in L^1((0,T);\mathcal{H}) \mid f(t,.) \in F(t,u), \text{ hầu hết } t \in (0,T)\}. \tag{2.3}$$

2.1 Nghiệm nhẹ và công thức nghiệm nhẹ

Ta thấy rằng, $u = u(t,x)$ là nghiệm của bài toán (1.1) khi và chỉ khi tồn tại $f \in \mathcal{S}_F(u)$ và thỏa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \mathcal{K}\mathcal{A}^{\sigma_1}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \mathcal{A}^{\sigma_2}u(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in (0,T] \times \Omega \\ u(0,x) = h(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Giả sử $\{\phi_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$ gồm toàn các véc tơ riêng của $\mathcal{A}$ tương ứng với dãy giá trị riêng dương $\{\lambda_n\}$ ở đây $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ và $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$.

Lần lượt nhân vô hướng hai vế của các phương trình trong hệ trên với hàm riêng ϕ_n, và giải hệ trên bằng phương pháp biến thiên hằng số thông thường ta nhận được

$$\langle u(t), \phi_n\rangle = e^{-A_n t}\langle h, \phi_n\rangle + B_n \int_0^t \langle f(s), \phi_n\rangle e^{-A_n(t-s)} ds$$

ở đó

$$A_n = \frac{\lambda_n^{\sigma_2}}{1 + \mathcal{K}\lambda_n^{\sigma_1}} \text{ và } B_n = \frac{1}{1 + \mathcal{K}\lambda_n^{\sigma_1}}$$

Trong trường hợp bài toán trên có nghiệm $u = u(t, x)$ thì khai triển Fourier của u là

$$u(t,.) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A_n t}\langle h, \phi_n\rangle\phi_n(.) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^t \langle f(s), \phi_n\rangle e^{-A_n(t-s)} ds\phi_n(.).$$

Điều này gợi ý cho ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (1.1) như sau:

Định nghĩa 2.1. Hàm $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H})$ gọi là nghiệm nhẹ (hay nghiệm tích phân) của (1.1) nếu thỏa các điều kiện sau

(i) $u(0,.) = h$, và

(ii) tồn tại $f \in \mathcal{S}_F(u)$ để cho với mọi $t \in [0, T]$ ta có

$$u(t,.) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A_n t}\langle h, \phi_n\rangle\phi_n(.) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{\int_0^t \langle f(s), \phi_n\rangle e^{-A_n(t-s)} ds\right\}\phi_n(.) \tag{2.4}$$

2.2 Tính chất nửa liên tục trên và cô đặc theo độ đo phi compact

Cho $f \in L^1((0, T); \mathcal{H})$ ta định nghĩa

$$\Phi(f)(t,.) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{\int_0^t \langle f(s), \phi_n\rangle e^{-A_n(t-s)} ds\right\}\phi_n(.). \tag{2.5}$$

Trong mục này mục đích của chúng ta là thiết lập các tính chất nửa liên tục trên, tính chất χ-cô đặc của toán tử đa trị $\Phi \circ \mathcal{S}_F$.

Bổ đề 2.2. *Cho dãy $\{f_n\} \subset L^1((0, T); \mathcal{H})$ là một dãy nửa compact. Khi đó ta có các khẳng định sau đây:*
a) Tập $\{\Phi(f_n): n \in \mathbb{N}\}$ là đồng liên tục.
b) Tập $\{\Phi(f_n): n \in \mathbb{N}\}$ là compact tương đối trong $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H})$.
c) Nếu $f_n \rightharpoonup f_0$ thì $\Phi(f_n) \to \Phi(f_0)$.

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh khẳng định a.. Giả sử $t, t' \in [0, T]$ thỏa $0 \leq t < t' \leq T$. Khi đó

$$\begin{aligned}\Phi(f_n)(t,.) - \Phi(f_n)(t',.) &= \sum_{j=1}^{\infty} B_j \left\{\int_0^t \big(\alpha_n(t, s, j) - \alpha_n(t', s, j)\big) ds - \int_t^{t'} \alpha_n(t', s, j) ds\right\}\phi_j(.) \\ &= L(n)(t, t',.) + M(n)(t, t',.)\end{aligned}$$

ở đó $\alpha_n(t, s, j) = \langle f_n(s), \phi_j\rangle e^{-A_j(t-s)}$,

$$L(n)(t, t',.) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \left\{\int_0^t \big(\alpha_n(t, s, j) - \alpha_n(t', s, j)\big)\phi_j(.) ds\right\} \in \mathcal{H} \text{ và}$$

$$M(n)(t, t',.) = -\sum_{j=1}^{\infty} B_j \left\{\int_t^{t'} \alpha_n(t', s, j)\phi_j(.) ds\right\} \in \mathcal{H}.$$

Trong đánh giá dưới đây các hằng số C là khác nhau không phụ thuộc vào f_n và $(t,t') \in [0,T] \times [0,T]$. Sử dụng đánh giá (1.2) và tính tích vô hướng $\langle L(n)(t,t',.), L(n)(t,t',.)\rangle$ với chú ý tính bị chặn của các dãy số $\{A_j\}_{j=1,2,..}, \{B_j\}_{j=1,2,....}$ ta có

$$\begin{aligned} \|L(n)(t,t',.)\|_{\mathcal{H}}^2 &\le C\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \left|\langle f_n(s),\phi_j\rangle\right|^2 ds|t'-t|^2 \\ &= C\int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \left|\langle f_n(s),\phi_j\rangle\right|^2 ds|t'-t|^2 \\ &\le C\int_0^T \|f_n(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds|t-t'|^2 \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Từ giả thiết nửa compact của dãy $\{f_n\}$, thì dãy này khả tổng bị chặn, nghĩa là tồn tại $\alpha \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ để $\|f_n(s)\|_{\mathcal{H}} \le \alpha(s)$ với hầu hết $s \in [0,T]$ và mọi $n \in \dot{\mathbb{N}}$. Do đó từ (2.6) ta có đánh giá

$$\|L(n)(t,t',.)\|_{\mathcal{H}}^2 \le C_1|t'-t|^2. \qquad (2.7)$$

Lập luận tương tự ta cũng có đánh giá

$$\|M(n)(t,t',.)\|_{\mathcal{H}}^2 \le C_2|t'-t|^2. \qquad (2.8)$$

Từ (2.7) và (2.8) ta nhận được

$$\|\Phi(f_n)(t,.) - \Phi(f_n)(t',.)\|_{\mathcal{H}}^2 \le C|t'-t|^2.$$

Điều này cho ta kết luận khẳng định a. là đúng.

Tiếp đến ta chứng minh khẳng định b.. Ta sẽ chứng tỏ tập $\{\Phi(f_n): n \in \dot{\mathbb{N}}\}$ bị chặn từng điểm. Thật vậy, với $t \in [0,T]$ và chú ý tính chất nửa compact của dãy $\{f_n\}$ ta có

$$\begin{aligned} \chi(\{\Phi(f_n)(t,.): n \in \dot{\mathbb{N}}\}) &\le C\chi\left\{\int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_n(s),\phi_j\rangle\phi_j(.)ds: n \in \dot{\mathbb{N}}\right\} \\ &= C\chi\left\{\int_0^t f_n(s)ds: n \in \dot{\mathbb{N}}\right\} \\ &\le C\int_0^t \chi(\{f_n(s): n \in \dot{\mathbb{N}}\})ds = 0.\end{aligned}$$

Điều này cho ta $\chi(\{\Phi(f_n)(t,.): n \in \dot{\mathbb{N}}\}) = 0$ và do đó tập $\{\Phi(f_n)(t,.): n \in \dot{\mathbb{N}}\}$ là compact tương đối trong $\mathcal{H}$ và do đó nó bị chặn trong $\mathcal{H}$. Áp dụng định lý Arzela-Ascoli ta có khẳng định b.. Khẳng định c. là hệ quả của b. với chú ý Φ là ánh xạ tuyến tính bị chặn từ $L^1((0,T);\mathcal{H})$ vào $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$.

Sử dụng tính chất nửa liên tục trên từ giả thiết (Hb) của F và áp dụng Định lý Mazur chúng ta nhận được bổ đề sau (Kamenskii & cs., Lemma 5.1.1]).

Bổ đề 2.3. *Cho dãy $\{v_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$ và dãy $\{f_n\}_{n\ge1} \subset L^1((0,T);\mathcal{H})$ thỏa $f_n \in \mathcal{S}_F(v_n)$ với mọi $n \ge 1$. Khi đó, nếu $v_n \to v$ và $f_n \rightharpoonup f$ thì $f \in \mathcal{S}_F(v)$.*

Tính chất đóng của $\Phi \circ \mathcal{S}_F$ được suy ra từ việc sử dụng Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.3.

Bổ đề 2.4. *Với các giả thiết (H) ta có toán tử đa trị Φ o $\mathcal{S}_F$ là đóng.*

Chứng minh. Giả sử các dãy $\{v_n\}_{n\ge1}$ và $\{z_n\}_{n\ge1}$ là các dãy trong $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$ thỏa

$$v_n \to v, z_n \in \Phi \circ \mathcal{S}_F(v_n) \text{ và } z_n \to z$$

Ta sẽ chứng tỏ $z \in \Phi \circ \mathcal{S}_F(v)$. Ta lấy tùy ý dãy $\{f_n\}$ trong $L^1((0,T);\mathcal{H})$ thỏa $f_n \in \mathcal{S}_F(v_n)$ và $z_n = \Phi(f_n)$. Khi đó, từ điều kiện (Hc) đảm bảo rằng dãy $\{f_n\}$ là khả tổng bị chặn. Thêm nửa, điều kiện (Hd) cho ta $\{f_n\}$ là nửa compact và cũng compact yếu trong $L^1((0,T);\mathcal{H})$(xem [18, Theorem 5.1.2]). Vì vậy, ta có thể giả sử $f_n \to f \in L^1((0,T);\mathcal{H})$. Bởi Bổ đề 2.2 ta có $\Phi(f_n) \to \Phi(f) = z$ và do đó theo Bổ đề 2.3 ta có $f \in \Phi \circ \mathcal{S}_F(v)$.

Kết quả sau đây được suy ra từ Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.4.

Bổ đề 2.5. *Giả sử rằng điều kiện (H) được thỏa mãn. Khi đó toán tử đa trị $\Phi \circ \mathcal{S}_F$ là nửa liên tục trên.*

Tiếp theo, chúng tôi sử dụng độ do phi compact phù hợp. Cho D là tập con của $\mathcal{C}([0,T],\mathcal{H})$, ký hiệu $\Delta(D)$ là họ các tập con đếm được của D và L là một số dương. Ta định nghĩa

$$\nu_L(D) \triangleq \max_{Q\in\Delta(D)}(\gamma_L(Q); \mathrm{mod}_C(Q)),$$

ở đó

$$\gamma_L(Q) \triangleq \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\chi(Q(t)),\ \mathrm{mod}_C(Q) \triangleq \lim_{\delta\to 0}\sup_{v\in D}\max_{|t'-t|\le\delta}\|v(t')-v(t)\|,$$

trong đó $Q(t)=\{w(t): w\in Q\}$. Độ đo phi compact ν_L có đầy đủ các tính chất nêu trong Bổ đề 1.1, bạn đọc có thể tìm thấy điều này ở (Kamenskii & cs., Example 2.1.4).

Bổ đề 2.6. *Giả sử rằng điều kiện (H) được thỏa mãn, $\mathcal{S}_F: \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}) \to \mathcal{P}(L^1(0,T);\mathcal{H})$ định nghĩa bởi (2.3) và Φ định nghĩa bởi (2.5). Khi đó, tồn tại số $L>0$ để cho $\Phi\circ\mathcal{S}_F$ là ánh xạ đa trị cô đặc theo độ do ν_L.*

Chứng minh. Chứng minh này được dựa vào chứng minh của [18, Theorem 5.1.3] với việc đánh giá chặn trên thích hợp cho $\gamma_L(\Phi\circ\mathcal{S}_F)$. Giả sử D là tập con bị chặn của $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$ thỏa

$$\nu_L(D) \le \nu_L(\Phi\circ\mathcal{S}_F), \tag{2.9}$$

ở đây $\le$ là thứ tự trong $\mathbb{R}^2$ gây nên bởi nón $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Ta sẽ chứng tỏ D là tập compact tương đối. Giả sử $\{v_n\}$ là dãy tùy ý trong D, ta đặt $g_n(t,.)=\Phi(f_n)(t,.)$ với $f_n\in\mathcal{S}_F(v_n)$ và ta có

$$\nu_L(\{g_n: n\ge 1\}) = \big(\gamma_L(\{g_n: n\ge 1\}); \mathrm{mod}_C(\{g_n: n\ge 1\})\big)$$

và

$$\begin{aligned} e^{-Lt}\chi(\{g_n(t,.): n\ge 1\}) &= e^{-L}\ \chi\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty} B_j\left(\int_0^t \langle f_n(s),\phi_j\rangle e^{-A_j(t-s)}ds\right)\phi_j(.): n\ge 1\right\}\right) \\ &\le C_0 e^{-Lt}\int_0^t \chi(\{f_n(s): n\ge 1\})ds \\ &\le C_1 \sup_{s\in[0,T]}\left(e^{-Ls}\chi(\{v_n(s,.): n\ge 1\})\right)\int_0^t s^{\gamma_1}e^{-L(t-s)}ds \end{aligned}$$

ở đây ta có sử dụng điều kiện chính quy (Hd) trong đánh giá sau cùng. Từ bất đẳng thức trên ta có

$$\gamma_L(\{g_n: n\ge 1\}) \le C_1\left(\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t s^{\gamma_1}e^{-L(t-s)}ds\right)\gamma_L(\{v_n: n\ge 1\}). \tag{2.10}$$

Vì với $\gamma>-1$

$$\lim_{L\to\infty}\left(\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t s^{\gamma}e^{-L(t-s)}ds\right)=0$$

nên tồn tại $L_0>0$ để

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t s^{\gamma_1}e^{-L(t-s)}ds < \frac{1}{4C_1}\ \text{ với mọi } L\ge L_0. \tag{2.11}$$

Thêm nữa, từ quan hệ (2.9) dẫn đến $\gamma_{L_0}(\{g_n: n\ge 1\}) \ge \gamma_{L_0}(\{v_n: n\ge 1\})$. Do đó kết hợp điều này với (2.10) và (2.11) ta có $\gamma_{L_0}(\{v_n: n\ge 1\})=0$ và vì thế $\chi(\{v_n(t,.)\})=0$ với mọi $t\in[0,T]$. Bởi các điều kiện (Hc), (Hd) ta suy ra dãy $\{f_n\}$ là nửa compact. Áp dụng Bổ đề 2.2 ta suy ra tập $\{g_n: n\ge 1\}$ là compact tương đối, vì vậy $\nu_{L_0}(D)=(0,0)$. Ta hoàn thành chứng minh bổ đề.

2.3 Tính chất compact của tập nghiệm

Trong mục này ta sẽ thiết lập tính compact của tập nghiệm yếu của bài toán (1.1) sẽ trình bày bởi Định lý 2.7. Ta ký hiệu $\mathcal{S}_h^F[0,T]$ là tập nghiệm yếu của (1.1).

Định lý 2.7. *Giả sử F thỏa điều kiện (H) và $h\in\mathcal{H}$ khi đó tập $\mathcal{S}_h^F[0,T]$ là tập compact khác rỗng của $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$.*

Chứng minh. Xét toán tử đa trị $\mathcal{M}: \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}))$ định nghĩa bởi

$$\mathcal{M}(u) := \left\{v\in\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}): v(t,.) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A_n t}\langle h,\phi_n\rangle\phi_n(.) + \Phi(f)(t,.), f\in\mathcal{S}_F(u)\right\}$$

Áp dụng Bổ đề 2.5 và Bổ đề 2.6 ta nhận được $\mathcal{M}$ là nửa liên tục trên và cô đặc theo độ đo phi compact ν_{L_0}, ở đó L_0 là số dương thỏa (2.11). Ta định nghĩa không gian

$$\mathcal{C}_{L_0}([0,T];\mathcal{H}) = \{v\in\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}): \exists K>0, \|v(t,.)\|_{\mathcal{H}} \le Ke^{L_0 t}\forall t\in[0,T]\},$$

trang bị chuẩn

$$\| v \|_{C_{L_0}([0,T];\mathcal{H})} = \sup_{t\in[0,T]} e^{-L_0 t} \| v(t,\cdot) \|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in C_{L_0}([0,T];\mathcal{H}).$$

Trong không gian này ta ký hiệu $\bar{B}(r)$ là quả cầu đóng có tâm tại gốc và bán kính r. Ta sẽ chứng tỏ tồn tại số $r > 0$ để cho $\mathcal{M}$ mang quả cầu $\bar{B}(r)$ vào chính nó. Thật vậy, chọn $r > C_1 \| h \|_{\mathcal{H}} + (r+1)/4$. Với $u \in \bar{B}(r), f \in \mathcal{S}_F(u), v \in \mathcal{M}(u)$ và sử dụng điều kiện (Hc) ta có

$$\begin{aligned} e^{-L_0 t} \| v(t,.) \|_{\mathcal{H}} &\le e^{-L_0 t} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A_n t} \langle h, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_{\mathcal{H}} + e^{-L_0 t} \| \Phi(f)(t,.) \|_{\mathcal{H}} \\ &\le C_1 \left(e^{-L_0 t} \| h \|_{\mathcal{H}} + \int_0^t e^{-L_0(t-s)} e^{-L_0 s} s^{\gamma_1} (1 + \| u(s,.) \|_{\mathcal{H}}) ds \right) \\ &\le C_1 \left(e^{-L_0 t} \| h \|_{\mathcal{H}} + \int_0^t s^{\gamma_1} (e^{-L_0 s} + r) e^{-L_0(t-s)} ds \right) \\ &\le C_1 \left(e^{-L_0 t} \| h \|_{\mathcal{H}} + (1+r) \int_0^t s^{\gamma_1} e^{-L_0(t-s)} ds \right) < r \end{aligned}$$

Điều này cho ta $v \in \bar{B}(r)$. Ta nhận được $\mathcal{S}_h^F[0,T] \neq \emptyset$ nhờ vào áp dụng Bổ đề 1.2. Việc còn lại là ta chứng tỏ $\mathcal{S}_h^F[0,T]$ là tập compact. Giả sử $u \in \mathcal{S}_h^F[0,T]$ và $t \in [0,T]$. Khi đó $u \in \mathcal{M}(u)$, tồn tại $f \in \mathcal{S}_F(u)$ với áp dụng bất đẳng thức Gronwall để ta có đánh giá

$$\begin{aligned} \| u(t,.) \|_{\mathcal{H}} &\le C_0 \| h \|_{\mathcal{H}} + C_1 \int_0^t s^{\gamma_1} (1 + \| u(s,.) \|_{\mathcal{H}}) ds \\ &\le C_2 \| h \|_{\mathcal{H}} \exp \left(\int_0^t s^{\gamma_1} \mathrm{ds} \right) \le C \end{aligned}$$

ở đó C không phụ thuộc t. Do đó bởi áp dụng Bổ đề 1.3 ta kết thúc chứng minh định lý.

3. KẾT LUẬN

Bài viết này chúng tôi đã chứng minh tính chất khác rỗng và compact cho tập nghiệm của phương trình vi phân đa trị chứa các toán tử tự liên hợp với bậc không nguyên, chúng tôi đã sử dụng một độ đo phi compact nhận giá trị trong không gian có thứ tự thích hợp để chứng tỏ ánh xạ nghiệm là cô đặc. Bài viết đóng góp kỹ thuật sử dụng độ đo phi compact để nghiên cứu tính chất tập nghiệm của lớp phương trình vi phân đa trị.

LỜI CẢM ƠN.

Bài báo này được sự hỗ trợ của Trường Đại học Thủ Dầu Một thuộc đề tài mã số DT.21.1-014.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Caraballo, T., Ngoc, T.B., Tuan, N.H. & Wang, R. (2021). On a nonlinear Volterra integrodifferential equation involving fractional derivative with Mittag-Leffler kernel. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *149*, 3317-3334.

Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F. & Rogosin, S. V. (2014). *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer Monographs in Mathematics: Springer, Heidelberg.

Hung, N.V. & Tri, V.V. (2020). Stability analysis for parametric symmetric vector quasi-equilibrium problems with application to traffic network problems. *J. of Nonlinear and Convex Analysis*, *21*(10), 2207--2223.

Kamenskii, M., Obukhovskii, V. & PZecca, P. (2001). *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7. Walter de Gruyter & Co., Berlin.

Ngoc, T.B., Caraballo, T., Tuan, N.H. & Zhou, Y. (2021). Existence and regularity results for terminal value problem for nonlinear fractional wave equations. *Nonlinearity, 34*, 1448.

Ngoc, T.B., Tri, V.V, Hammouch, Z. & Can, N.H. (2021). Stability of a class of problems for time-space fractional pseudo-parabolic equation with datum measured at terminal time. *Appl. Numer. Math., 167*, 308-329.

Tri, V.V. & Karapinar, E. (2020). A Fixed Point Theorem and an Application for the Cauchy Problem in the Scale of Banach Spaces. *Filomat, 34* (13), 4387-4398.

Tri, V.V. & Rezapour, S. (2021). Eigenvalue Intervals of Multivalued Operator and its Application for a Multipoint Boundary Value Problem. (2021). *Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 47* (4), 1301-1314.
Tuan, N.H., Ngoc, T.B., Zhou, Y. & O'Regan, D. (2020). On existence and regularity of a terminal value problem for the time fractional diffusion equation. *Inverse Problems, 36* (055011).
Tuan, N.H. & Caraballo, T. (2021). On initial and terminal value problems for fractional nonclassical diffusion equations. *Proc. Amer. Math. Soc., 149* (1), 143-161.

EXISTENCE COMPACTNESS OF THE SOLUTION SETS FOR DIFFERENTIAL EQUATION INCLUSION INVOLVING SELF-ADJOINT OPERATOR

VO NGOC MINH[1], VO VIET TRI[2,*]
[1] *Department of Mathematics and Computer Science, University of Natural Science, Ho Chi Minh City*
[2] *Faculty of Education, Thu Dau Mot University, Binh Duong Province*
[*] *Corresponding Author: trivv@tdmu.edu.vn*

Abstract. In this paper, we establish existence and compactness for sets of solutions of differential equations with the natural association operator in a different fractional order. Our main techniques are based on the study of non-compact measurement that takes values in the Banach order space.
Keywords. multimapping, measure of noncompctness, differential equation, self-adjoint operator

Ngày nhận bài: 08/07/2022

Ngày chấp nhận đăng: 09/09/2022