

PHÂN TÍCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA THANH MỎNG DƯỚI TÁC DỤNG CỦA HỆ TẢI TRỌNG VÀ ĐIỀU KIỆN BIÊN PHỨC TẠP

ĐẶNG HOÀNG MINH⁽¹⁾, NGUYỄN HỒNG PHÚC⁽¹⁾, NGUYỄN VIỆT ĐỨC⁽¹⁾
PHÙNG VĂN BÌNH⁽²⁾

⁽¹⁾Khoa Công nghệ Cơ khí, Trường Đại học Công nghiệp thành phố Hồ Chí Minh;

⁽²⁾Khoa Công nghệ Robot và Tổ hợp các hệ thống tự động hóa, Trường Đại học Tổng hợp Quốc Gia Matxcova mang tên N.E. Bauman, Liên Bang Nga;

danghoangminh@iuh.edu.vn, phucnguyen889@gmail.com, nguyenvietduc@iuh.edu.vn,
phungvanbinh.vp@gmail.com

Tóm tắt. Trong công trình này, một nghiên cứu nhằm xác định miền ổn định hình dạng phẳng - tĩnh của thanh mỏng dưới tác dụng của một hệ tải trọng và điều kiện biên phức tạp đã được thực hiện. Hệ tải trọng bao gồm các lực dọc trục, tải phân bố đều và mômen uốn ngẫu lực ở hai bên đầu thanh. Hai phía đầu của thanh mỏng được kẹp chặt theo dạng ngàm kẹp chứ không đơn thuần là các gối bản lề như các công trình đã được công bố trước đây. Phương pháp năng lượng kết hợp với giải tích đã được sử dụng để giải quyết các bài toán đặt ra. Từ đó các tác giả xây dựng nên các biểu thức toán học tường minh, cho phép tính toán và khảo sát các trạng thái tới hạn của thanh mỏng dưới tác dụng của hệ lực tương hỗ phức tạp nói trên. Đồng thời các tính toán số để kiểm nghiệm mức độ tin cậy của hệ thức cũng đã được thực hiện và cho ra sai số chênh lệch khá nhỏ. Kết quả của công trình có thể được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực cơ khí, xây dựng và nhiều ngành kỹ thuật khác.

Từ khóa. Thanh mỏng, dầm thành mỏng, miền ổn định, miền đàn hồi, tải trọng phức hợp, phương pháp năng lượng

STABILITY ANALYSIS OF THIN BAR SUBJECTED TO A LOADING SYSTEM WITHIN COMPLEX BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. The research on determination of the static and lateral stability region of thin bar subjected to a loading system within the complex boundary conditions has been studied in this paper. The loading system includes axial force, uniformly distributed loads and bending moment at both ends of the bar. Both ends of the bar are embedded steadily, while in the literature elsewhere they are simply pin supports. Energetic and analytical methods were used to solve the proposed problem. Having said that, the authors have developed an explicit mathematical model that allows calculating and analysing the critical state of thin bar under the abovementioned complex loading system. Besides, the numerical calculation to verify the reliability of the obtained model was also carried out and it turned out the relatively insignificant error. The outcomes of this paper could be used broadly for mechanical and civil engineering, as well as many others in the engineering area.

Keywords. Thin bar, thin-walled beam, stable region, stability, complex loading system, energy method

1. MỞ ĐẦU

Hiện nay, các kết cấu thành mỏng ngày càng được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như xây dựng, cơ khí chế tạo, hàng không, đóng tàu cùng nhiều ngành công nghiệp khác. Một trong những yêu cầu kỹ thuật quan trọng nhất trong thiết kế các kết cấu dạng này là cần đảm bảo trạng thái ổn định của chúng khi chịu tải.

Trong những công trình của mình, các tác giả [1-8] đã nghiên cứu tương đối chi tiết vấn đề này cho các trường hợp, khi mà kết cấu thanh mỏng phải chịu tác dụng bởi 1-2 dạng tải trọng riêng biệt, như lực dọc trục, mômen uốn ngẫu lực ở 2 đầu và tải phân bố ngang - đều. Tuy nhiên, do sự phức tạp trong quá trình xây dựng các biểu thức tường minh và những hạn chế trong các công cụ tính toán mà bài toán ổn định dạng phẳng của thanh mỏng dưới tác dụng của hệ tải trọng phức hợp (3 hoặc nhiều hơn 3 tác nhân

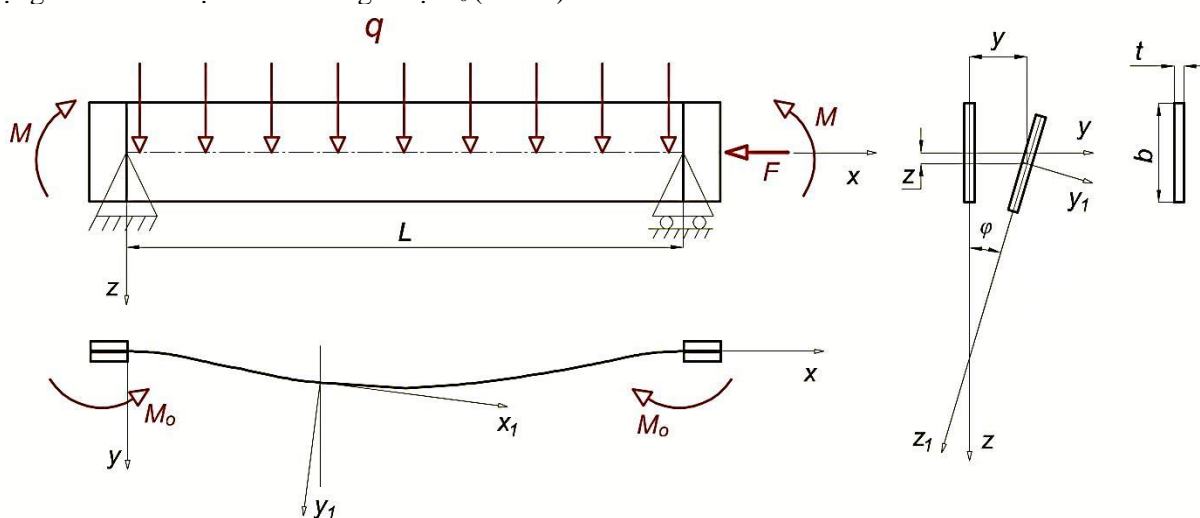
lực) cho đến nay vẫn chưa được giải quyết một cách toàn diện. Mặc dù vậy, những năm gần đây bài toán dạng này đã bước đầu được nỗ lực nghiên cứu, ví dụ như là trong công trình của Magnucka và Blandzi E. [9]. Tuy nhiên thì việc ứng dụng kết quả của các tác giả này cho bài toán, khi mà lực dọc trục có giá trị lớn lại không khả thi do sai số khá lớn. Điều này được chứng minh thông qua trường hợp riêng, khi mà tác dụng vào thanh mỏng chỉ có lực dọc trục thì công thức tính lực tới hạn do biểu thức của [9] đem lại có sự khác biệt rất nhiều so với công thức kinh điển Öle (công thức tính lực tới hạn cho sự ổn định của thanh chịu nén).

Trong công trình [10] một bài toán về điều kiện ổn định dầm thanh mỏng với tiết diện mặt cắt có 2 trục đối xứng tổng quát với các tải trọng phức hợp được nghiên cứu thành công. Tuy nhiên nó chỉ đúng với điều kiện biên là gối tựa đơn giản, còn trong tình huống ngàm kẹp hai đầu dầm (ví dụ như dầm thành mỏng là 1 lưỡi cưa trong kết cấu cơ khí) thì kết quả của công trình này lại chưa thực sự phù hợp. Với những lý do nêu trên, trong bài viết này các tác giả đề xuất một quy trình tính toán mới cho bài toán ổn định dạng phẳng của thanh mỏng với mặt cắt hình chữ nhật chịu tác dụng của hệ lực và điều kiện biên phức hợp (Ngàm kẹp). Kết quả thu được của nghiên cứu có dạng là một biểu thức toán học tổng quát, tường minh, cho phép đánh giá chính xác trạng thái ổn định của các kết cấu thanh mỏng dưới tác dụng của hệ tải trọng và điều kiện biên phức tạp.

2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN VÀ XÂY DỰNG BIỂU THỨC TÍNH

Cùng xét thanh mỏng với tiết diện hình chữ nhật chịu tác dụng của mômen uốn M , lực cắt phân bố đều với cường độ q và lực dọc trục F (hình 1). Chuyển vị và góc xoay của mặt cắt ngang thanh mỏng được coi là nhỏ [1]. Góc tọa độ được gán với trọng tâm mặt cắt ngang của đầu bên trái thanh mỏng. Trục x trùng với trục của thanh, trục y vuông góc với mặt phẳng có độ cứng chống uốn lớn nhất, trục z thẳng đứng hướng xuống như trong hình 1. Bên cạnh hệ trục tọa độ chính (toàn cục) x, y, z , chúng ta còn sử dụng hệ trục tọa độ hỗ trợ dạng cong ở vị trí cân bằng của mặt cắt ngang là x_1, y_1, z_1 . Góc của hệ trục tọa độ hỗ trợ này cũng trùng với vị trí trọng tâm mặt cắt ngang đang xét nhưng ở vị trí chuyển vị. Các trục y_1 và z_1 hướng theo các trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang, trục x_1 trùng với hướng tiếp tuyến của đường cong đàn hồi thanh mỏng.

Xét trường hợp, khi mà mặt cắt phía 2 đầu của thanh mỏng không thể xoay quanh 2 trục song song với x và z . Điều đó có nghĩa là mặt cắt ở 2 đầu thanh, không những chuyển vị theo phương y mà đạo hàm bậc nhất của nó y' (góc xoay quanh trục z) cũng phải về giá trị 0. Còn sự quay tự do quanh trục y của 2 mặt cắt này thì có thể xảy ra trong trường hợp điều kiện biên trên. Với điều kiện biên kẹp chặt ở 2 đầu ngàm của thanh như vậy, giả sử để giữ cho mặt cắt 2 đầu không xoay quanh trục z , 2 ngàm kẹp này phải tác dụng vào thanh một mômen có giá trị M_0 (hình 1).



Hình 1: Mô hình phân tích ổn định dạng phẳng của thanh mỏng với mặt cắt hình chữ nhật

Phương trình cân bằng của mặt cắt thanh mỏng [1]:

$$M_y \cdot \frac{dy}{dx} + M_0 \cdot \frac{dz}{dx} = C \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad (1)$$

$$M_y \cdot \varphi - M_0 + F \cdot y = -B_2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2)$$

Phương trình vi phân liên quan đến $z(x)$ trong các công bố của [1-3] mô tả hiện tượng uốn của dầm trong mặt phẳng zOx . Tuy nhiên, trong mặt phẳng này, dầm sẽ không bị uốn thuần túy như vậy mà nó bị uốn là do sự mất ổn định, gây nên bởi hiện tượng xoay của mặt cắt một góc $\varphi(x)$ (hình 1). Vì thế việc sử dụng phương trình vi phân uốn thuần túy liên quan đến $z(x)$ trong vấn đề mất ổn định dầm thành mỏng là không phù hợp. Bên cạnh đó, trong công trình của [11-13], một hệ thức liên hệ giữa các độ võng $y(x)$, $z(x)$ và góc xoay $\varphi(x)$ đã được thiết lập trong tình huống mất ổn định, cho phép tìm ra được mối quan hệ chính xác hơn giữa 3 đại lượng này. Nó có dạng như sau:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \varphi \quad (3)$$

Trong đó C – Độ cứng của thanh mỏng khi xoắn, $B_2 = E \cdot J_2$ – độ cứng nhỏ nhất khi uốn, φ – góc xoay của mặt cắt ngang khi thanh mỏng chịu uốn bị oằn, M_0 – Mômen ngẫu lực tại 2 điểm kẹp đầu thanh trong mặt phẳng xOy , có giá trị khác không ở tình huống điều kiện biên này.

Mômen uốn nội lực M_y đối với trục Oy được xác định theo công thức:

$$M_y = M + \frac{q \cdot L \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (4)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi xuất hiện trong thanh mỏng là tổng hợp của hiện tượng uốn trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất và hiện tượng xoay khi bị oằn lúc mất ổn định:

$$U = \frac{1}{2} \cdot B_2 \cdot \int_0^L \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \int_0^L \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (5)$$

Công của các tác nhân ngoại lực như lực dọc trục F , tải phân bố đều q và mômen ngẫu lực M được xác định như sau:

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + q \cdot \int_0^L z dx + M \cdot \frac{dz}{dx} \Big|_{x=0} - M \cdot \frac{dz}{dx} \Big|_{x=L} \quad (6)$$

Trạng thái ổn định tới hạn của thanh mỏng được miêu tả bằng phương trình cực trị của tổng cơ năng trong thanh [9]:

$$\delta(U - W) = 0 \quad (7)$$

Hàm độ võng y về mặt lý thuyết là nghiệm của hệ phương trình (1) ÷ (3) rất phức tạp, tuy nhiên trong thực tế tính toán, đường cong đàn hồi của thanh có thể được tính gần đúng theo dạng hàm lượng giác đơn giản sau [1-2]:

$$y = y_1 \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right] \quad (8)$$

Thực vậy, ta dễ thấy dạng hàm (8) trên thỏa mãn các điều kiện biên kẹp 2 đầu thanh mỏng. Trong phương trình (1) đại lượng vô cùng nhỏ $M_0 \cdot \frac{dz}{dx}$ có thể bỏ qua và sau đó xác định từ phương trình này góc φ với các điều kiện biên là $\varphi(0) = 0$ và $\varphi(L) = 0$:

$$\varphi(x) = y_1 \cdot \left[p_1 + (-p_1 + Lp_2x - p_2x^2) \cdot \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) + (Lp_3 - 2p_3x) \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right] \quad (9)$$

Các hệ số không phụ thuộc vào x :

$$p_1 = \frac{M}{C} + \frac{L^2 q}{4C\pi^2}; \quad p_2 = -\frac{q}{2C}; \quad p_3 = \frac{Lq}{4C\pi};$$

Về mặt bản chất cơ học:

- Phương trình vi phân (1) thể hiện phương trình cân bằng của mặt cắt dầm khi nó xoay 1 góc $\varphi(x)$. Do đó việc tìm góc $\varphi(x)$ được thực hiện ở phương trình này sẽ đem lại độ chính xác cao nhất [10].

- Tương tự, phương trình vi phân (2) thể hiện phương trình cân bằng của mặt cắt dầm khi nó bị dịch chuyển một độ võng $y(x)$ trong mặt phẳng xOy . Do đó việc tìm độ võng $y(x)$ được thực hiện ở phương trình này cũng sẽ đem lại độ chính xác cao nhất.

Như vậy, theo hướng tiếp cận của lời giải trong công trình này, chúng ta sẽ cho trước dạng gần đúng của hàm độ võng $y(x)$, sau đó sử dụng phương trình (1) để đi tìm góc xoay $\varphi(x)$.

Thế biểu thức độ võng y (8) và góc φ (9) vào (3) để giải phương trình vi phân với điều kiện $z(0) = 0$ và $z(L) = 0$, ta thu được nghiệm là biểu thức xác định độ võng z :

$$z(x) = \frac{z_0 y_1^2}{192L^2 \pi^2} \cdot \left[z_1 + xz_2 - x^2 z_3 + 2Lx^3 z_4 - x^4 z_4 - z_5 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + z_6 \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) - Lxz_7 \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + x^2 z_7 \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + z_8 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + xz_9 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \right] \quad (10)$$

Với các hệ số không phụ thuộc vào x sau đây:

$$z_1 = 9L^4 p_2 - 24L^3 p_3 \pi + 168L^2 p_1 \pi^2; \quad z_2 = 192L p_1 \pi^4 - 32L^3 p_2 \pi^4; \quad z_3 = 192 p_1 \pi^4; \quad z_4 = 32 p_2 \pi^4; \\ z_5 = 192L^2 p_1 \pi^2; \quad z_6 = -9L^4 p_2 + 24L^3 p_3 \pi + 24L^2 p_1 \pi^2; \quad z_7 = 24L^2 p_2; \quad z_8 = 12L^4 p_2 \pi - 24L^3 p_3 \pi^2; \\ z_9 = -24L^3 p_2 \pi + 48L^2 p_3 \pi^2;$$

Thay thế các biểu thức vừa thu được ở trên là y , φ và z vào (5) và (6), ta thu được biểu thức xác định thế năng biến dạng đàn hồi của thanh mỏng, có dạng:

$$U = \frac{4B_2 \pi^4 y_1^2}{L^3} + \frac{C y_1^2}{480L \pi^2} \{-480L p_1 p_3 \pi^3 + 480 p_1^2 \pi^4 + 20L^3 p_2 p_3 \pi(-3 + 16\pi^2) + \\ + L^4 p_2^2(15 + 40\pi^2 + 16\pi^4) + 40L^2 \pi^2(p_1 p_2(3 - 4\pi^2) + 2 p_3^2(3 + 2\pi^2))\}$$

Và công của các ngoại lực là W có dạng:

$$W = \frac{y_1^2}{23040L^2 \pi^4} \{120L \pi^2(qz_1 + 2M(z_3 - z_7)) + 23040FL \pi^6 + 36L^5 \pi^2 qz_4 - \\ - 5L^3(8\pi^2(qz_3 + 6Mz_4) - 3qz_7) + 30L^2 \pi q(2\pi z_2 - z_9) - 480M \pi^3 z_9\}$$

Gán các kết quả trên vào phương trình (7), ta thu được hệ thức miêu tả trạng thái ổn định tới hạn của thanh mỏng:

$$R(M, F, q) = 1920L^2 M^2 \pi^6 + 1920C(FL^2 \pi^6 - 4B_2 \pi^8) + 80L^4 M \pi^2(3 + 18\pi^2 + 4\pi^4)q + \\ + L^6(-15 + 210\pi^2 + 80\pi^4 + 16\pi^6)q^2 = 0 \quad (11)$$

Hệ thức tổng quát $R(M, F, q) = 0$ miêu tả ranh giới của vùng không gian khi mà thanh mỏng còn giữ được trạng thái ổn định dưới tác dụng của đồng thời các yếu tố mômen uốn M , lực dọc trục F và tải trọng phân bố đều q . Ta cùng kiểm nghiệm lại độ tin cậy của hệ thức (11) thông qua các trường hợp, khi mà tác dụng vào thanh mỏng chỉ có các tải trọng riêng biệt và công thức xác định giá trị tới hạn của chúng đã được xây dựng, chứng minh trong các công trình trước đây:

Khi $F = 0$ và $q = 0$ ta thế vào (11) từ đó thu được giá trị tới hạn của mômen ngẫu lực M_{cr}

$$M_{cr} = \frac{2\pi\sqrt{B_2 C}}{L} \quad (12)$$

Khi $M = 0$ và $q = 0$ ta cũng thế vào (11) từ đó thu được giá trị tới hạn của lực dọc trục F_{cr} tương tự như công thức Olev:

$$F_{cr} = \frac{4\pi^2 B_2}{L^2} \quad (13)$$

Khi $M = 0$ và $F = 0$ từ (11) ta có giá trị tới hạn của tải phân bố đều q_{cr} :

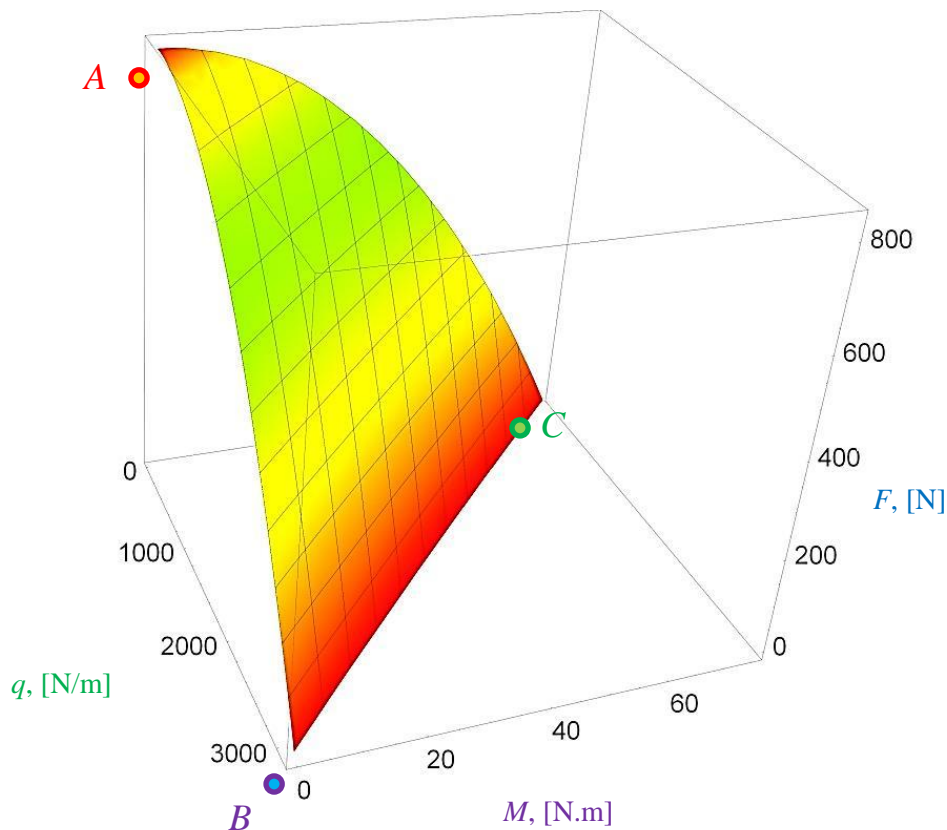
$$q_{cr} = 53.74 \frac{\sqrt{B_2 C}}{L^3} \quad (14)$$

Các hệ thức kết quả (12) ÷ (13) hoàn toàn trùng khớp so với các kết quả chính xác được trình bày trong các công bố nổi tiếng của [1-4].

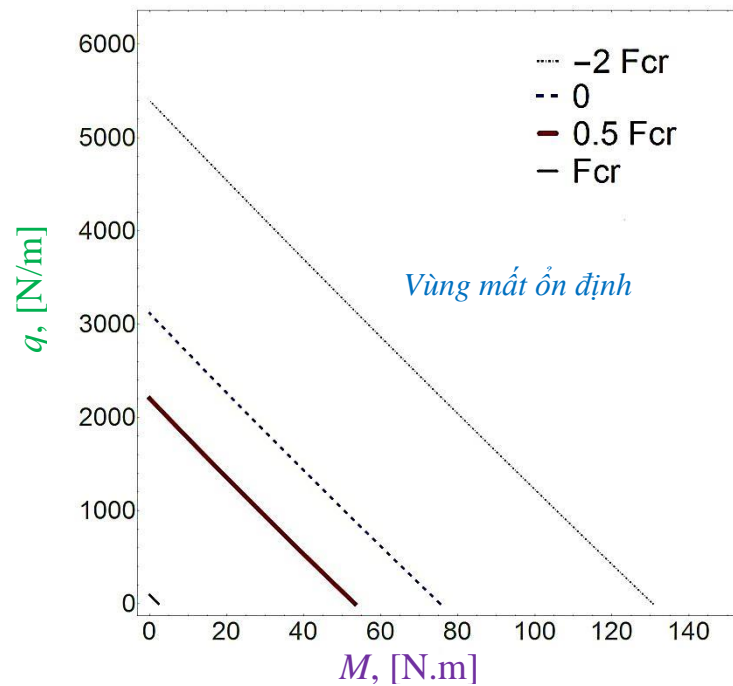
Để biểu diễn kết quả thu được (11) trực quan bằng đồ thị, chúng ta sẽ xét một thanh thép mỏng có mặt cắt hình chữ nhật với các đặc tính cụ thể sau: $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Pa; $\mu = 0.28$; $\rho = 7800$ kg/m³, kích thước: $L = 0.455$ m; $b = 0.008$ m; $t = 0.00147$ m. Khi đó, giá trị của các lực tới theo các công thức (12) ÷ (14) là: $M_{cr} = 75.43$ Nm, $F_{cr} = 835.92$ N, $q_{cr} = 3116.39$ N/m. Vùng ổn định của thanh được biểu diễn ở các đồ thị hình 2-4.

Ở trên các hình vẽ 2 và 3 ta nhận thấy rằng, khi tăng lực nén F từ 0 đến giá trị lực tới hạn F_{cr} , vùng ổn định bị thu hẹp dần. Khi lực nén tăng với giá trị tới hạn $F = F_{cr}$, vùng ổn định thu hẹp về thành một điểm (điểm A trên hình 2 hoặc điểm (0,0) trên hình 3). Điều đó có nghĩa là dầm bị mất ổn định ngay cả khi không có tác dụng của mômen uốn và lực phân bố ngang đều ($M_{cr} = 0$, $q_{cr} = 0$). Ngược lại, khi lực dọc trục là lực kéo (F có giá trị âm), vùng ổn định sẽ được mở rộng thêm ra (đường $F = -2.F_{cr}$ trên hình 3).

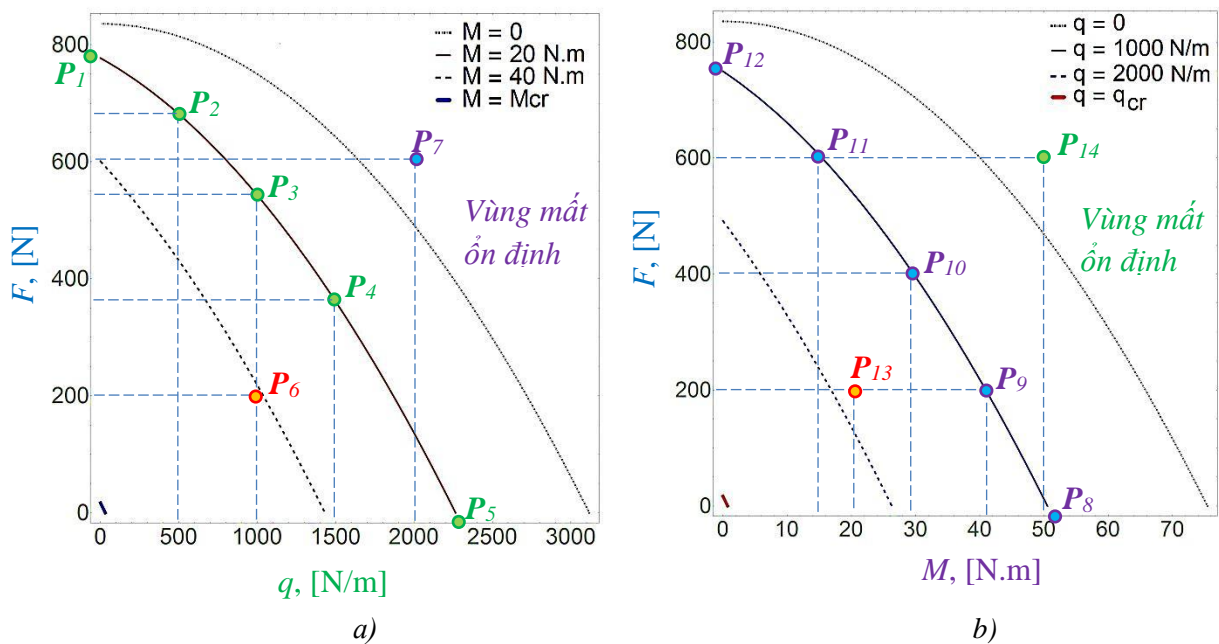
Tương tự, nhìn vào các hình 2 và 4.a ta nhận thấy, khi tăng mômen ngẫu lực ở 2 đầu thanh mỏng từ 0 đến giá trị mômen tới hạn $M = M_{cr}$ thì vùng ổn định cũng bị thu hẹp dần về một điểm (C trên hình 2 hoặc (0,0) trên hình 4.a). Nghĩa là thanh mỏng cũng bị mất ổn định ngay cả trong trường hợp không có lực dọc trục F cũng như tải phân bố ngang đều q tác dụng vào ($F_{cr} = 0$, $q_{cr} = 0$). Cuối cùng, nhìn vào các hình 2 và 4.b ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng, khi tăng cường độ tải phân bố ngang – đều q từ 0 đến giá trị tới hạn $q = q_{cr}$ thì vùng ổn định cũng bị thu hẹp dần về một điểm (B trên hình 2 hoặc (0,0) trên hình 4.b). Nghĩa là thanh mỏng bị mất ổn định ngay cả trong trường hợp không có lực dọc trục F cũng như mômen uốn ngẫu lực ở 2 đầu thanh tác dụng vào ($F_{cr} = 0$, $M_{cr} = 0$).



Hình 2. Ranh giới của vùng ổn định thanh mỏng dưới tác dụng của hệ lực phức tạp gồm mômen ngẫu lực M , lực dọc trục F và tải phân bố ngang – đều q



Hình 3. Ranh giới của vùng ổn định thanh mỏng với các giá trị khác nhau của lực dọc trục F



Hình 4. Ranh giới của vùng ổn định thanh mỏng với các giá trị khác nhau: a) của mômen uốn ngẫu lực M b) của tải phân bố ngang – đều q

3. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Trong trường hợp, khi mà tác dụng vào thanh mỏng chỉ có một trong số các tải trọng thì giá trị tới hạn của chúng có thể được tìm một cách chính xác bằng việc giải phương hệ phương trình vi phân đàn hồi. Các nghiệm thu được của hệ là (12) – (14) trùng với các kết quả nghiên cứu trước đây cho những trường hợp riêng này. Tuy nhiên cần kiểm nghiệm mức độ tin cậy của hệ thức (11) trong tình huống tải trọng phức

tạp tổng quát. Điều này có thể được tiến hành bằng việc sử dụng các phương pháp số gần đúng, ví dụ như phương pháp phần tử hữu hạn (*Finite Element Method* - FEM) [13]. Lời giải bài toán phân tích độ ổn định bằng FEM trong khuôn khổ bài báo được kiểm nghiệm bằng 2 gói hệ thống tính toán là NX Nastran và APM WinMachine.

Với các gói phần mềm sử dụng FEM, việc xây dựng đồ thị vùng ổn định trực quan như các hình 2-4 là điều không thể. Các phần mềm chỉ cho phép kiểm tra sự ổn định của thanh mỏng thông qua hệ số an toàn ổn định (n_{stab}) đối với từng bộ tham số tải trọng (M, q, F) cho trước. Với các điểm thuộc vùng ổn định thì hệ số an toàn tính được nhờ chương trình FEM sẽ lớn hơn 1 ($n_{stab} > 1$), với các điểm nằm ngoài vùng ổn định – hệ số an toàn sẽ nhỏ hơn 1 ($n_{stab} < 1$), và những điểm nằm ngay trên bề mặt (đường) ranh giới vùng ổn định thì hệ số an toàn sẽ bằng 1 ($n_{stab} = 1$). Do đó phương pháp thử nghiệm được tiến hành như sau.

Căn cứ vào hệ thức (11) ta chọn 5 bộ số (M, q, F) thuộc đường biên của vùng ổn định (chính là các điểm $P_1 \div P_5$ nằm trên đường cong khi $M = 20$ N.m, hình 4.a). Cùng trong hình 4a, ta chọn 1 bộ số (M, q, F) thuộc vùng ổn định (phía dưới đường cong khi $M = 20$ N.m là điểm P_6) và 1 bộ số nằm ngoài vùng ổn định (phía trên đường cong khi $M = 20$ N.m là điểm P_7). Với 7 bộ số (M, q, F) tìm được (các bộ số này được bao quanh hình chữ nhật màu xanh thẫm ở bảng 1), ta lần lượt đặt làm dữ liệu đầu vào cho các chương trình tính toán NX Nastran và APM WinMachine để tính hệ số an toàn ổn định cho một thanh mỏng với kích thước và tính chất cơ – lý của vật liệu như đã trình bày ở mục 2 ($E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Pa; $\mu = 0.28$; $\rho = 7800$ kg/m³, kích thước: $L = 0.455$ m; $b = 0.008$ m; $t = 0.00147$ m). Kết quả cho thấy, 5 bộ số đầu tiên nằm ở tại ranh giới vùng ổn định (đường $M = 20$ N.m, hình 4a) cho giá trị hệ số an toàn $n_{stab} \approx 1$, bộ số nằm trong vùng ổn định cho giá trị $n_{stab} > 1$ và bộ số nằm ngoài vùng ổn định cho giá trị $n_{stab} < 1$.

Tương tự, nhờ hệ thức (11) và đường $q = 1000$ N/m trên hình 4.b, ta xác định 7 bộ số (M, q, F) với giá trị $q = 1000$ N/m không đổi, tương ứng với các điểm $P_8 \div P_{12}, P_{13}, P_{14}$ (các bộ số này được bao quanh hình chữ nhật màu đỏ ở bảng 1). Thử nghiệm tính toán đưa ra kết quả tương tự: 5 bộ số (M, q, F) nằm trên đường $q = 1000$ N/m trên hình 4b cho giá trị hệ số an toàn $n_{stab} \approx 1$, bộ số nằm trong vùng ổn định cho giá trị $n_{stab} > 1$ và bộ số nằm ngoài vùng ổn định cho giá trị $n_{stab} < 1$.

Bảng 1. Hệ số an toàn ổn định của thanh mỏng dưới tác dụng của hệ tải trọng và điều kiện biên phức tạp

Điểm khảo sát	Dữ kiện	Dữ kiện	Tính được từ hệ thức (11)	Vị trí của điểm khảo sát ổn định	NX Nastran	APM WinMachine
	$M, [N.m]$	$q, [N/m]$	$F, [N]$			
P_1	20	0	777.162	ở tại ranh giới	0.9947	1.015
P_2	20	500	681.451	ở tại ranh giới	0.9799	1.025
P_3	20	1000	542.704	ở tại ranh giới	0.9602	1.026
P_4	20	1500	360.922	ở tại ranh giới	0.9416	1.017
P_5	20	2264	0	ở tại ranh giới	0.9214	0.9911
P_6	20	1000	Chọn 200	trong vùng	1.310	1.42837
P_7	20	2000	Chọn 600	ngoài vùng	0.7011	0.7519
P_8	50.5234	1000	0	ở tại ranh giới	0.9708	1.0913
P_9	40.9335	1000	200	ở tại ranh giới	0.964	1.0687
P_{10}	29.6946	1000	400	ở tại ranh giới	0.9602	1.0446
P_{11}	15.4632	1000	600	ở tại ranh giới	0.9612	1.0183
P_{12}	0	1000	750.01	ở tại ranh giới	0.967	0.9972
P_{13}	20	1000	Chọn 200	trong vùng	1.31	1.4284
P_{14}	50	1000	Chọn 600	ngoài vùng	0.6853	0.7478

Từ bảng thực nghiệm số, ta thấy hệ thức (11) và các đồ thị hình 2-4 mô tả rất chính xác vùng ổn định của thanh mỏng dưới tác dụng của hệ các lực (M, F, q) bất kỳ. Hệ thức (11) có độ tin cậy rất cao để có thể

sử dụng trong quá trình tính toán và thiết kế các kết cấu thanh mỏng thỏa mãn được điều kiện ổn định dạng phẳng.

4. KẾT LUẬN

Như vậy, trong nghiên cứu này, bài toán phân tích ổn định của thanh mỏng dưới tác dụng của hệ lực và điều kiện biên phức tạp đã được giải quyết. Kết quả thu được của nghiên cứu có dạng là một hệ thức toán học (11) tổng quát, tường minh và được biểu diễn bằng đồ thị trực quan với không gian khảo sát (hình 2 ÷ 4), cho phép đánh giá chính xác trạng thái ổn định cũng như ứng xử cơ học của các kết cấu thanh mỏng. Các tính toán số để kiểm nghiệm mức độ tin cậy của hệ thức cũng đã được thực hiện và cho sai số chênh lệch không đáng kể. Các kết quả nêu trên của công trình có thể được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực thiết kế các kết cấu cơ khí, xây dựng và nhiều ngành kỹ thuật khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
- [2]. Власов В.З. Избранные труды. Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. (том 2) – М.: изд-во АН СССР, 1963. - 507 с.
- [3]. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М., «Машиностроение», 1978. – 312 с.
- [4]. Белоус В.П. Исследование устойчивости стержней при продольном и поперечном нагружении. Дис. на соиск. уч. ст. канд. докт. наук. Дзямбул, 1983. 213 с.
- [5]. N.S. Trahair, Flexural-torsional Buckling of Structures, E & FN Spon, London, Glasgow, New York, Tokyo, Melbourne, Madras, 1993.
- [6]. F. Mohri, C. Bouzerira, M. Potier-Ferry, Lateral buckling of thin-walled beam-column elements under combined axial and bending loads, Thin-Walled Struct. 46 (2008) 290–302.
- [7]. Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of structures. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.; 2010.
- [8]. Bui HC. Buckling analysis of thin-walled sections under general loading conditions. Thin-Walled Struct 2009;47:730–9.
- [9]. Magnucka-Blandzi E. Critical state of a thin-walled beam under combined load. Applied Mathematical Modelling 2009;33:3093–8.
- [10]. Phung Van Binh, Dang Hoang Minh, Gavriushin Sergei Sergeevich, Nguyen Viet Duc, Boundary of stability region of a thin-walled beam under complex loading Condition, International Journal of Mechanical Sciences 122 (2017) 355–361.
- [11]. Magnucki K. Some problems of optimization of beam and shell structures under elastic stability constraints. Scientific thesis No. 292. Poznan University of Technology. Poznan, 1993 (in Polish).
- [12]. K. Magnucki, W. Szyz, P. Stasiewicz, Stress and elastic buckling of a thin-walled beam with monosymmetrical open cross-section, Thin-Walled Struct. 42 (2004) 25–38.
- [13]. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О. Ф. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. МГТУ им Н.Э. Баумана, 2014. 480 с.

Ngày nhận bài: 18/01/2017

Ngày chấp nhận đăng: 04/06/2017